

Note de service

À : Sous-commission sur l'expérience dans les régimes de retraite
De : Bob Howard
Date : Le 13 février 2014
Objet : **Tables de mortalité CPM 2014**

Document 214014

1. CONTEXTE

La présente note de service énonce la méthode que j'ai utilisée pour construire les tables de mortalité, la justification des paramètres et les résultats atteints. Les données sous-jacentes sont l'ensemble de données sur les régimes de retraite agréés (RRA) qu'a recueillies MIB Solutions, et que j'ai modifiées avec l'accord de la sous-commission. Je n'ai utilisé que les données sur les retraités; l'expérience se mesure toujours par le montant de la rente plutôt que par le nombre d'enregistrements. Des détails sur la collecte et la validation des données figurent dans [l'étude préparée par la sous-commission](#) et dans le [rapport préparé par MIB Solutions](#).

La présente note de service remplace la publication 213060 de l'ICA publiée le 31 juillet 2013. Plusieurs modifications ont été apportées à la méthode et aux résultats, mais une seule a une importance majeure, soit l'adoption de facteurs de pondération par industrie pour faire en sorte que les données représentent davantage la population des régimes canadiens à prestations déterminés (PD). (Les données de ce document jusqu'à la section 6 ne sont jamais pondérées et elles sont pondérées selon l'industrie à compter de la section 7, à moins d'indication précise à l'effet du contraire). Les modifications ne sont pas mises en évidence dans ce document.

2. DÉFINITIONS

q_x^y désigne la probabilité qu'une personne de x ans à l'anniversaire le plus proche, au début de l'année civile y , décèdera avant la fin de l'année civile. Il convient de noter que x et y sont définis au début de la période d'un an.

I_x^y désigne le taux d'amélioration de la mortalité des personnes de x ans à l'anniversaire le plus proche, au début de l'année civile $y-1$ par rapport à celles de x ans au début de l'année civile y . Dans ce cas, x est constant pendant toute la période d'un an, et y est défini à la fin de la période.

Par conséquent, $q_x^y = q_x^{y-1}(1 - I_x^y)$.

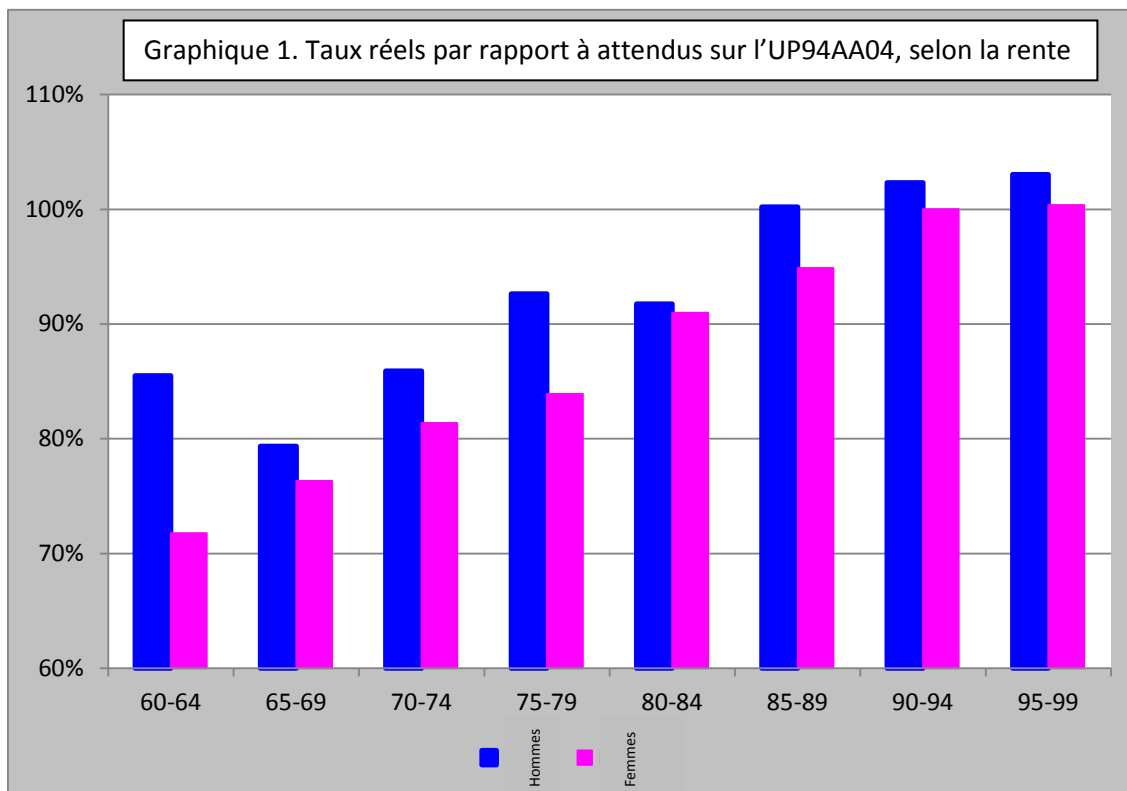
Toutefois, cette définition débouche sur une application plutôt étrange si l'on cherche à connaître l'amélioration sur une partie de l'année, par exemple au milieu de l'année $y-1$. Elle est étrange parce que le facteur d'amélioration est indexé pour l'année y , mais le taux de mortalité est indexé pour l'année $y-1$.

$$q_x^{y-0,5} = q_x^{y-1}(1 - I_x^y)^{0,5}$$

Dans les pages qui suivent, j'utilise rarement des symboles actuariels, mais je me réfère à un taux de mortalité ou un taux d'amélioration de la mortalité pour un an. Les définitions ci-haut visent à préciser mes intentions.

3. DÉTERMINATION DU BESOIN D'UNE NOUVELLE TABLE CANADIENNE

Le graphique 1 présente le ratio du nombre réel de décès, mesuré par les rentes annualisées au nombre de décès prévus par la table UP94 projetée avec l'échelle AA en 2004 (UP94AA04). Les barres représentent les hommes et les femmes pour les groupes d'âge de cinq ans indiqués.



Les taux de mortalité issus de l'ensemble de données sont significativement inférieurs à ceux anticipés par la table UP94AA04 jusqu'aux âges avancés. Il existe toutefois un problème plus grave : la pente est différente. Si les barres du graphique étaient à peu près toutes de la même hauteur, nous pourrions ajuster la table UP94AA04 par un multiple simple. Puisque la pente de l'expérience réelle est sensiblement plus abrupte que prévu, il n'existe qu'une bonne solution, c'est-à-dire construire une nouvelle table.

4. APERÇU DE LA MÉTHODE

La méthode utilisée pour construire les nouvelles tables comprend les étapes suivantes. Il convient de noter que les calculs utilisent les données selon le montant de la rente; les données d'après le nombre d'individus ne sont pas utilisées pour la construction de table.

1. Décider des âges à inclure dans la graduation principale;
2. Ajuster le nombre de décès pour tenir compte de l'effet de l'amélioration jusqu'en 2014;
3. Ajuster les facteurs de pondération selon l'industrie pour mieux témoigner des prestataires canadiens des régimes à PD;
4. Ajuster les données pour uniformiser la distribution par secteur et tranche de taille pour tous les âges;
5. Grader les données à l'aide de la méthode de Whittaker-Henderson;
6. Extrapoler à des âges moins avancés et plus avancés à l'aide de données provenant d'autres sources;
7. Élaborer des facteurs d'ajustement basés sur la taille des rentes.

Chacune de ces étapes est décrite de façon détaillée ci-après.

5. ÂGES À UTILISER

Les données ne sont pas distribuées uniformément selon l'âge. Il existe de nombreuses données pour la construction d'une table dans le milieu de la fourchette des âges des retraités, mais beaucoup moins aux âges moins avancés et plus avancés. Je préfère que l'écart-type du taux de mortalité soit inférieur à 10 % du taux proprement dit pour accroître la fiabilité de la table construite. Selon ce critère, j'utiliserais une fourchette d'âges de 57 ans à 96 ans pour les hommes et de 57 ans à 100 ans pour les femmes. Toutefois, j'ai décidé d'utiliser les âges 55 ans à 100 ans, sachant que les taux gradués à certains de ces âges (moins avancés et plus avancés) seraient par la suite remplacés par des taux interpolés. La table 1 renferme des détails pour certains âges.

Il convient de noter que les taux de mortalité dans la table 1 sont basés sur le revenu plutôt que le nombre. J'ai toujours recours aux données selon le revenu à moins d'indication contraire.

| | Hommes | | | Femmes | | |
|-----|---------|--------|----------|---------|--------|----------|
| | Qx brut | É.-T. | É.-T./Qx | Qx brut | É.-T. | É.-T./Qx |
| 50 | 0.0041 | 0.0014 | 0.350 | 0.0079 | 0.0010 | 0.133 |
| 55 | 0.0032 | 0.0004 | 0.130 | 0.0030 | 0.0003 | 0.098 |
| 60 | 0.0053 | 0.0004 | 0.072 | 0.0031 | 0.0003 | 0.097 |
| 65 | 0.0093 | 0.0005 | 0.058 | 0.0083 | 0.0005 | 0.054 |
| 70 | 0.0169 | 0.0007 | 0.044 | 0.0098 | 0.0007 | 0.070 |
| 75 | 0.0299 | 0.0010 | 0.033 | 0.0172 | 0.0010 | 0.059 |
| 80 | 0.0530 | 0.0015 | 0.029 | 0.0322 | 0.0015 | 0.048 |
| 85 | 0.0982 | 0.0027 | 0.027 | 0.0643 | 0.0025 | 0.039 |
| 90 | 0.1593 | 0.0059 | 0.037 | 0.1219 | 0.0046 | 0.038 |
| 95 | 0.2787 | 0.0161 | 0.058 | 0.1918 | 0.0097 | 0.050 |
| 100 | 0.2408 | 0.0564 | 0.234 | 0.3300 | 0.0286 | 0.087 |
| 105 | 0.3373 | 0.2125 | 0.630 | 0.2746 | 0.1433 | 0.522 |

6. AJUSTEMENT AUX FINS D'AMÉLIORATION

Nous¹ avons décidé que 2014 est l'année de base pour la table parce qu'il est probable qu'elle entre en vigueur au début de 2014.

Par le passé, la plupart des tables dérivait tout simplement de la sommation des données sur toutes les années et utilisaient le résultat global. Puis, au besoin, la table est projetée à une certaine année future. Toutefois, la sommation de données sur toutes les années peut introduire une double distorsion dans la table obtenue.

Premièrement, l'année réelle moyenne pondérée ne débutera pas exactement le 1^{er} janvier. Dans ce cas, la table ne correspond pas aux facteurs d'amélioration qui sont par la suite appliqués à la table de base. Cette préoccupation est valide dans notre cas parce que l'année d'expérience moyenne pondérée est 2004,39, et l'amélioration relative à 0,39 année n'est pas négligeable à tous les âges.

Deuxièmement, l'année d'expérience moyenne pondérée sera probablement différente à chaque âge. Dans notre cas, ce n'est pas un grave problème. Par groupes de cinq ans, l'année moyenne varie de 2004,14 entre 55 et 59 ans et 2004,59 entre 80 et 84 ans, mais la plupart des groupes se trouvent à 0,05 an près de 2004,50.

Les deux problèmes sont résolus en ajustant les décès déclarés au moyen de facteurs d'amélioration appropriés de manière à les rendre conformes à l'année civile 2014.

Le facteur d'ajustement est

$$\prod_{t=y+1}^{2014} (1 - I_x^t) \quad \text{pour les décès survenus au cours de l'année civile } y.$$

Par conséquent, les décès pour toutes les années sont réduits en prévision de l'amélioration de la mortalité entre l'année en question et 2014. L'échelle d'amélioration de la mortalité utilisée est celle proposée par la sous-commission.

7. AJUSTEMENT EN FONCTION DE L'INDUSTRIE

L'expérience de mortalité varie sensiblement selon l'industrie. Cependant, les données soumises aux fins de notre étude ne sont pas distribuées selon l'industrie de la même façon que dans l'ensemble de la population des régimes de retraite canadiens agréés à prestations déterminées. Par exemple, l'éducation est surreprésentée, et les finances et la construction sont sous-représentées dans nos données. Nous avons décidé d'ajuster les données en fonction de l'industrie afin qu'elles soient davantage représentatives des régimes canadiens à PD. Cette mesure est pragmatique. Les ajustements ne sont pas aussi précis que nous le souhaiterions, mais nous estimons que le résultat améliore la validité de notre étude.

Nous avons pu obtenir de Statistique Canada (série CANSIM 280-0011) le nombre de participants des régimes de retraite à PD selon l'industrie. Les groupes sectoriels reposent sur le Système de classification des industries de l'Amérique du Nord (SCIAN), mais notre classification des industries s'appuie sur la Classification type des industries (CTI). Nous avons dû diviser le groupe « Services d'enseignement, soins de santé et assistance sociale » en

¹ Tout au long du présent document, je parle à la première personne du pluriel (nous) lorsqu'il est question des points au sujet desquels la sous-commission a déjà étudié les options et en est arrivée à une décision collective, et à la première personne du singulier (je) au sujet des questions que j'ai proposées même si la sous-commission les a déjà parfois expressément approuvées.

« Enseignement » et « Autres ». Nous avons à cette fin utilisé les nombres d'employés selon l'industrie de la série 280-0063.

Nous avons ensuite pu déterminer la proportion selon l'industrie pour les participants des régimes à PD et la proportion selon l'industrie pour les chiffres figurant dans nos données. Nos données selon l'industrie peuvent ensuite être multipliées par le ratio de la proportion de Statistique Canada à notre proportion. Cependant, nous avons fait trois modifications dans les facteurs de pondération à appliquer à nos données. Nous avons établi un facteur maximal de 3,0, un facteur minimal de 0,2 et un facteur de 1,0 pour « inconnu ». Le désir d'avoir, dans notre échantillon, de meilleures proportions pour les industries, penchait en faveur d'un facteur de pondération maximal plus élevé. La crainte que les fluctuations statistiques dans les petits sous-ensembles de données puissent être amplifiées penchait en faveur d'un facteur maximal moins élevé. Notre choix est un compromis entre les deux questions concurrentes. D'après les résultats de mes tests, la sensibilité au facteur maximal est limitée, bien au-dessous de 0,5 % au chapitre des valeurs des rentes. Il convient de souligner que le total une fois les proportions sectorielles ajustées ne sera pas le même que le total avant ajustement, mais cela ne nous préoccupe pas puisque ce sont les taux de mortalité et non l'exposition totale qui nous intéressent. Cependant, en appliquant les facteurs de pondération, le calcul des écarts-types n'est plus exact. Il faut comprendre que les écarts-types des données pondérées sont approximatifs, mais qu'ils se rapprochent suffisamment des écarts réels pour être utiles.

La table 2 indique les proportions selon l'industrie avant ajustement (désigné le « nombre RRA »), la proportion dans les données de Statistique Canada et les facteurs de pondération que nous avons utilisés. Les facteurs de pondération sont appliqués à toutes les données pour l'industrie. Ainsi, si on applique un facteur de pondération de 2,0, les données ajustées correspondront au double du nombre et du revenu et au double de l'exposition et des décès pour cette industrie.

| Industrie | Nombre RRA | | StatCan | | Facteurs de pond. | |
|--|------------|-------|---------|-------|-------------------|--------|
| | H | F | H | F | H | F |
| 0100 - Agriculture, exploitation minière | 1.3% | 0.4% | 1.3% | 0.2% | 1.0113 | 0.4498 |
| 1500 - Construction | 1.9% | 0.1% | 16.4% | 0.4% | 3.0000 | 3.0000 |
| 2000-3000 - Fabrication | 8.6% | 2.8% | 11.6% | 2.8% | 1.3560 | 0.9996 |
| 4000 - Trans, comm ou svcs pub | 16.3% | 1.7% | 8.8% | 3.3% | 0.5376 | 1.8903 |
| 5000 - Comm de gros et détail | 1.6% | 0.9% | 5.5% | 4.4% | 3.0000 | 3.0000 |
| 6000 - Finance, assurance, info | 1.0% | 0.8% | 6.0% | 9.0% | 3.0000 | 3.0000 |
| 8000 - Services incl méd et social | 2.6% | 14.6% | 7.5% | 18.0% | 2.9133 | 1.2323 |
| 8200 - Établiss. d'enseignement | 28.7% | 42.6% | 4.0% | 11.6% | 0.2000 | 0.2730 |
| 9000 - Admin publique ou gvt | 29.7% | 32.9% | 35.4% | 49.5% | 1.1918 | 1.5016 |
| 9220 - Police, feu ou militaire | 2.4% | 0.0% | 2.9% | 0.0% | 1.1918 | 1.5016 |
| Inconnu | 5.9% | 3.0% | 0.8% | 0.8% | 1.0000 | 1.0000 |

La table 3 présente les taux de mortalité moyens à quelques âges avant et après ajustement des proportions pour les industries. Les taux de mortalité ont augmenté dans la plupart des cas, davantage aux âges plus jeunes, sous l'effet surtout du facteur de pondération moins élevé attribué à la scolarité.

| Âge | Avant | | Après | |
|-----|--------|--------|--------|--------|
| | H | F | H | F |
| 60 | 0.0053 | 0.0031 | 0.0060 | 0.0033 |
| 65 | 0.0093 | 0.0083 | 0.0110 | 0.0092 |
| 70 | 0.0169 | 0.0098 | 0.0184 | 0.0107 |
| 75 | 0.0299 | 0.0172 | 0.0327 | 0.0175 |
| 80 | 0.0530 | 0.0322 | 0.0553 | 0.0341 |
| 85 | 0.0982 | 0.0643 | 0.0999 | 0.0655 |
| 90 | 0.1593 | 0.1219 | 0.1587 | 0.1221 |
| 95 | 0.2787 | 0.1918 | 0.2678 | 0.1930 |

Il convient de noter que tous les renvois ultérieurs aux données dans le présent document se rapportent aux données après application des facteurs de pondération aux industries, à moins d'indication expresse contraire.

8. AJUSTEMENT EN FONCTION DE LA TAILLE

L'expérience de mortalité varie sensiblement selon la taille de la rente. Ce ne serait pas en soi une source de préoccupation sauf que la distribution en fonction de la taille varie de façon considérable selon l'âge. Chez les hommes, le revenu mensuel moyen à 60, 70, 80 et 90 ans s'établit respectivement à 2 392 \$, 1 179 \$, 901 \$ et 654 \$. Ainsi, l'augmentation des taux de mortalité avec l'âge, sans égard au montant, sera plus prononcée puisque la taille moyenne aux âges plus avancés est inférieure à celle aux âges plus jeunes.

Même si nous sommes en mesure de calculer un taux de mortalité brut approprié pour chaque cellule de sexe, de taille et d'âge, les taux de mortalité que nous en tirons lorsque nous combinons les tailles ou les âges ne seront pas appropriés. La seule façon d'éviter le problème consiste à ajuster la distribution des données d'une façon qui respecte l'expérience observée dans chaque cellule de sexe, de taille et d'âge.

Le concept qui sous-tend l'ajustement est semblable aux taux de mortalité ajustés en fonction de l'âge, qui sont utilisés par les démographes pour comparer la mortalité entre les pays qui présentent des distributions différentes selon l'âge. Les taux de mortalité à chaque âge sont appliqués à une population type. Les taux de mortalité moyens des deux pays basés sur une même population type offrent une comparaison significative du niveau de mortalité relatif entre les pays.

Dans ce cas, nous avons besoin non pas de l'ajustement selon l'âge, mais de l'ajustement en fonction de la taille. Vous pouvez voir ci-dessous de quelle façon j'effectue l'ajustement. Je procède séparément pour chaque sexe.

1. Déterminer la distribution de l'exposition selon la tranche de taille pour la totalité de l'ensemble de données à graduer. On trouvera à la section 0 plus de détails sur les tranches de taille.
2. Déterminer l'exposition totale pour chaque âge.
3. Déterminer l'exposition souhaitée pour chaque taille et âge, au moyen d'un produit extérieur des deux vecteurs précédents.
4. Pour chaque taille et âge, multiplier l'exposition et le nombre de décès par le ratio de la proportion de cette cellule de l'exposition souhaitée à l'exposition réelle. Il convient de noter que le taux de mortalité de chaque cellule n'est pas modifié.

5. Cependant, si certaines tranches de taille ne comportent aucune exposition à un âge particulier, il convient d'appliquer le paragraphe précédent (no 4) pour les cellules qui comprennent une donnée autre que zéro à cet âge et de modifier la proportion du total. La modification consiste à recalculer les proportions, en excluant les tranches présentant une exposition zéro. Au plan mathématique, il est nécessaire d'effectuer un certain redressement pour éviter une division par zéro. De façon pragmatique, nous ne pouvons pas utiliser une cellule sans exposition parce qu'elle ne comporte pas de taux de mortalité.
6. Sommer les données modifiées à toutes les tranches de taille à chaque âge. Les sommes qui en découlent peuvent servir à déterminer la table de mortalité de base.

Cette approche protège les taux de mortalité de chaque taille et âge, mais elle combine les données de telle sorte que les distributions variables par tranche de taille, selon l'âge, n'ont pas d'effet sur le résultat final.

La table 4 indique de quelle façon la méthode est appliquée pour les hommes de 65 ans et les hommes de 75 ans. À remarquer que les taux de mortalité pour chaque tranche de taille demeurent inchangés et que la distribution aux deux âges est la même, mais que le taux de mortalité « total » a changé. Le taux à 65 ans est plus élevé et à 75 ans, il est moins élevé après ajustement de la distribution. (Les tranches de taille sont mesurées en fonction du revenu mensuel).

| Limite inf. de la tranche | Hommes 65 | | | | Hommes 75 | | | |
|---------------------------------|--------------|--------|-----------|---------|--------------|--------|-----------|---------|
| | Distribution | | Mortalité | | Distribution | | Mortalité | |
| | Avant | Après | Avant | Après | Avant | Après | Avant | Après |
| 10 | 2.5% | 3.5% | 0.00936 | 0.00936 | 5.5% | 3.5% | 0.02705 | 0.02705 |
| 500 | 6.4% | 7.5% | 0.00930 | 0.00930 | 12.1% | 7.5% | 0.03000 | 0.03000 |
| 1000 | 10.0% | 9.3% | 0.00957 | 0.00957 | 14.5% | 9.3% | 0.02678 | 0.02678 |
| 1500 | 11.0% | 9.8% | 0.00978 | 0.00978 | 13.7% | 9.8% | 0.02868 | 0.02868 |
| 2000 | 10.9% | 9.6% | 0.00742 | 0.00742 | 11.0% | 9.6% | 0.02675 | 0.02675 |
| 2500 | 11.0% | 9.4% | 0.00772 | 0.00772 | 8.9% | 9.4% | 0.02211 | 0.02211 |
| 3000 | 9.7% | 8.7% | 0.00630 | 0.00630 | 8.0% | 8.7% | 0.02315 | 0.02315 |
| 3500 | 8.7% | 9.0% | 0.00663 | 0.00663 | 6.4% | 9.0% | 0.01896 | 0.01896 |
| 4000 | 7.7% | 8.0% | 0.00646 | 0.00646 | 5.1% | 8.0% | 0.02332 | 0.02332 |
| 4500 | 6.3% | 7.1% | 0.00724 | 0.00724 | 3.6% | 7.1% | 0.02009 | 0.02009 |
| 5000 | 4.4% | 5.4% | 0.00748 | 0.00748 | 2.6% | 5.4% | 0.02333 | 0.02333 |
| 5500 | 3.0% | 3.9% | 0.01197 | 0.01197 | 2.3% | 3.9% | 0.00772 | 0.00772 |
| 6000 | 8.2% | 9.0% | 0.00987 | 0.00987 | 6.3% | 9.0% | 0.01226 | 0.01226 |
| Total | 100.0% | 100.0% | 0.00818 | 0.00823 | 100.0% | 100.0% | 0.02438 | 0.02278 |

9. GRADUATION PRINCIPALE

Les données modifiées sont sommées à travers toutes les tranches. Les sommes ainsi obtenues révèlent le nombre de décès et l'exposition, mesurée en terme de rentes, pour chaque âge.

La méthode de graduation est celle de Whittaker-Henderson (WH), une méthode communément utilisée. La méthode WH est complexe au chapitre du calcul, mais elle est très simple au plan conceptuel. La version « ascenseur » de cette méthode est la suivante : la méthode WH optimise l'équilibre entre la justesse de l'ajustement des données graduées par rapport aux données brutes et le lissage des données graduées. L'ajustement est mesuré par la somme de l'écart au carré

entre les données graduées et les données brutes, habituellement pondérée par un autre ensemble de nombres, notamment l'exposition. Le lissage est mesuré par la somme de l'écart fini au carré, d'un degré déterminé, des données graduées. L'expression type à optimiser est énoncée ci-après :

$$\sum Wt(Grad - Brutes)^2 + h \sum (\Delta^n Grad)^2$$

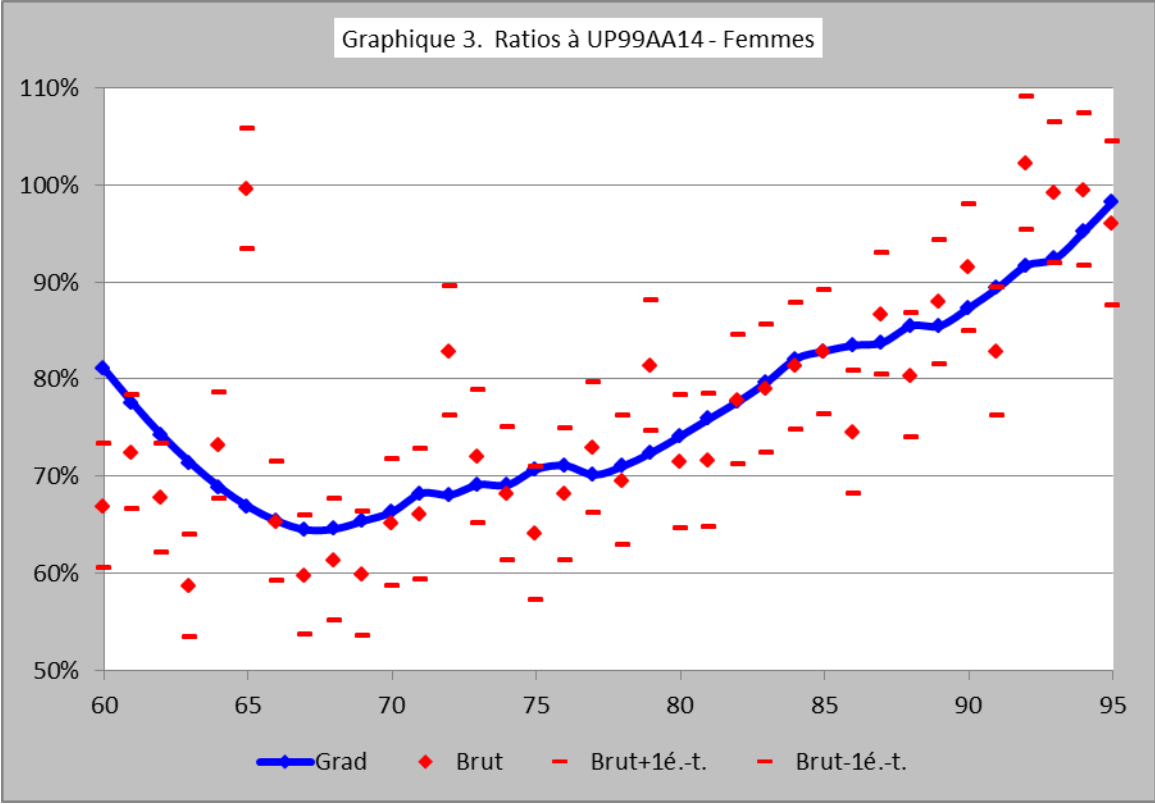
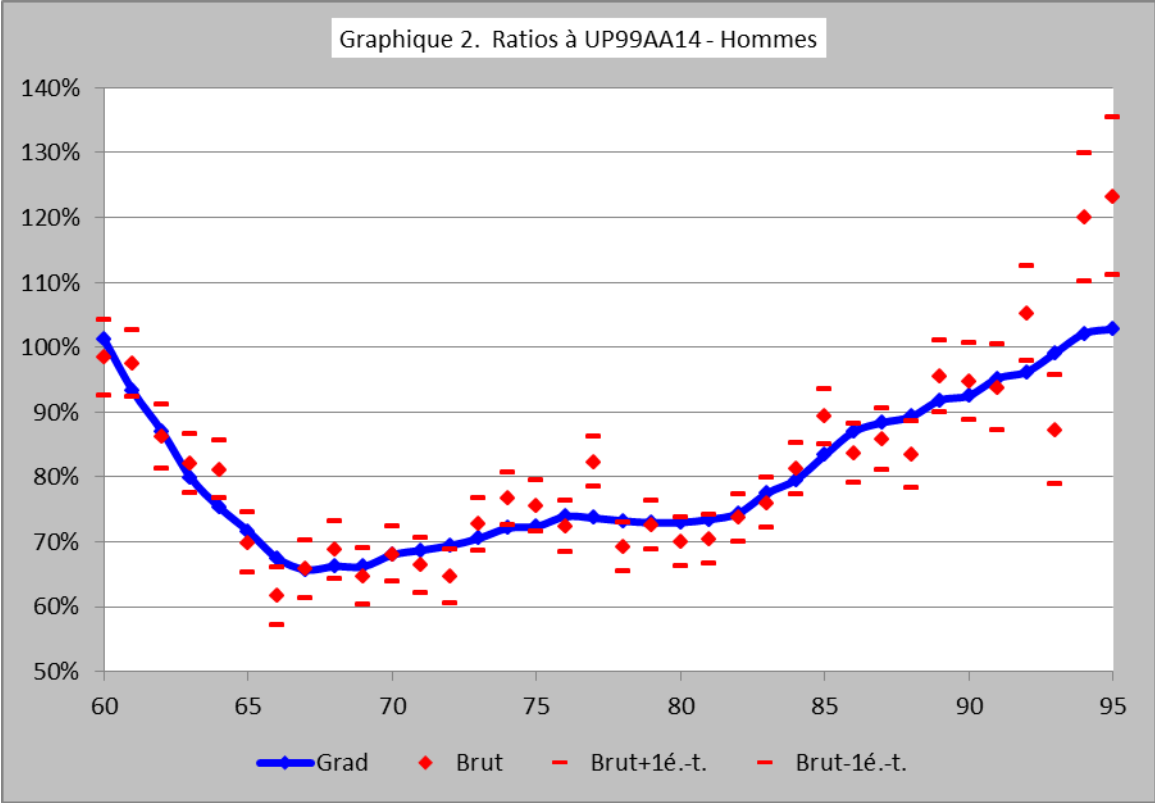
J'ai eu recours à la variation WH présentée par Lowrie qui correspond au parfait lissage pour le degré n sans un polynôme de degré $n-1$ comme dans la version usuelle de WH, mais avec un exponentiel plus un polynôme de degré $n-2$.

Les taux bruts de mortalité sont gradués par WH. Les coefficients de pondération sont les expositions normalisées de sorte que la somme des coefficients est 46, le nombre de taux gradués. Chez les hommes, le degré de l'écart est 3 et le facteur de lissage est 500, et l'exponentiel a une base de 1,12. Les mêmes facteurs sont utilisés pour les femmes, sauf que le facteur de lissage est 1 000.

La sensibilité du résultat aux paramètres de graduation est assez faible. J'ai préparé un autre document donnant des précisions sur la sélection des paramètres. Il n'est pas joint au présent document, mais je vous le ferai parvenir sur demande.

Les graphiques 2 et 3 indiquent les résultats de la graduation en ratios à la table UP94 projetée en 2014 avec l'échelle AA (UP94AA14). La ligne bleue représente les taux gradués et les losanges rouges, les taux de mortalité bruts. Les tirets rouges au-dessus et en-dessous des losanges représentent un écart-type des ratios des taux bruts à la table UP94AA14. Le fait que les tirets soient assez rapprochés pendant les âges centraux indique que les taux de mortalité gradués sont bien appuyés par les données.

En passant, pour ceux qui comparent cette note de service avec celle publiée le 31 juillet 2013, les taux de mortalité des hommes sont beaucoup plus élevés dans la soixantaine en raison des facteurs de pondération de l'industrie. L'effet est moins prononcé à d'autres âges et chez les femmes.



10. APPLICATION À DES ÂGES MOINS AVANCÉS

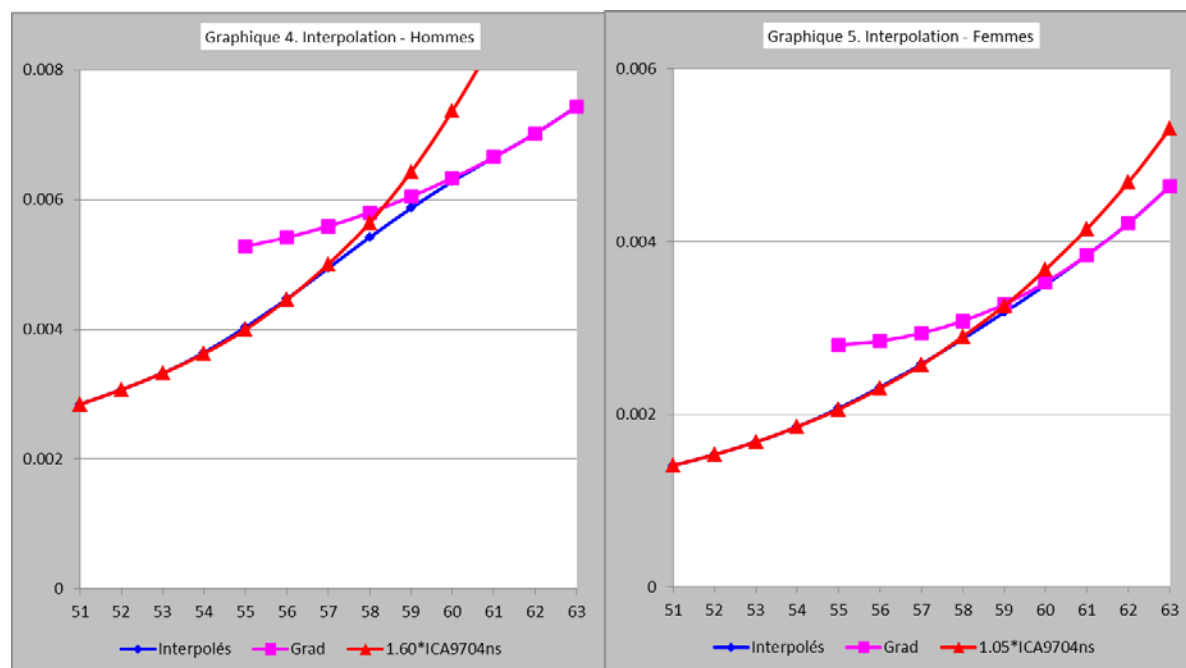
Nos données n'étaient pas propres à une utilisation aux fins de la construction d'une table à des âges moins avancés. Il y a très peu de retraités de moins de 55 ans et les données sur les participants actifs étaient de piètre qualité. Puisqu'il est nécessaire de développer notre table à des âges vraiment moins avancés, j'ai dû chercher une autre source, canadienne de préférence.

Les taux de mortalité aux âges plus jeunes proviennent de la table ICA9704 (publication 210028 de l'ICA). Cette table est destinée à l'assurance-vie individuelle, mais elle convient bien à cette fin pour diverses raisons :

1. Les données sous-jacentes sont canadiennes et assez récentes;
2. La durée « ultime » de la table, comme l'expérience dans les régimes de retraite, ne devrait afficher qu'un effet limité de la sélection;
3. La pente se rapprochera probablement de ce qui est nécessaire, même si les taux de mortalité puissent ne pas être justes;
4. C'est une table qui est couramment utilisée dans la pratique de l'assurance-vie, voire dans celle des régimes de retraite.

J'ai constaté qu'en multipliant les taux des hommes par 1,6, les deux tables se rapprochent assez. Chez les femmes, un multiple de 1,05 rapproche beaucoup les tables. Voir les graphiques 4 et 5.

Pour les 54 à 60 ans, les taux ont été obtenus en faisant correspondre un polynôme du 5^e degré aux taux déjà obtenus pour les 51, 52, 53, 61, 62 et 63 ans. Pour plus de précisions sur l'interpolation, voir les graphiques 4 et 5 ci-après.



11. APPLICATION AUX ÂGES PLUS AVANCÉS

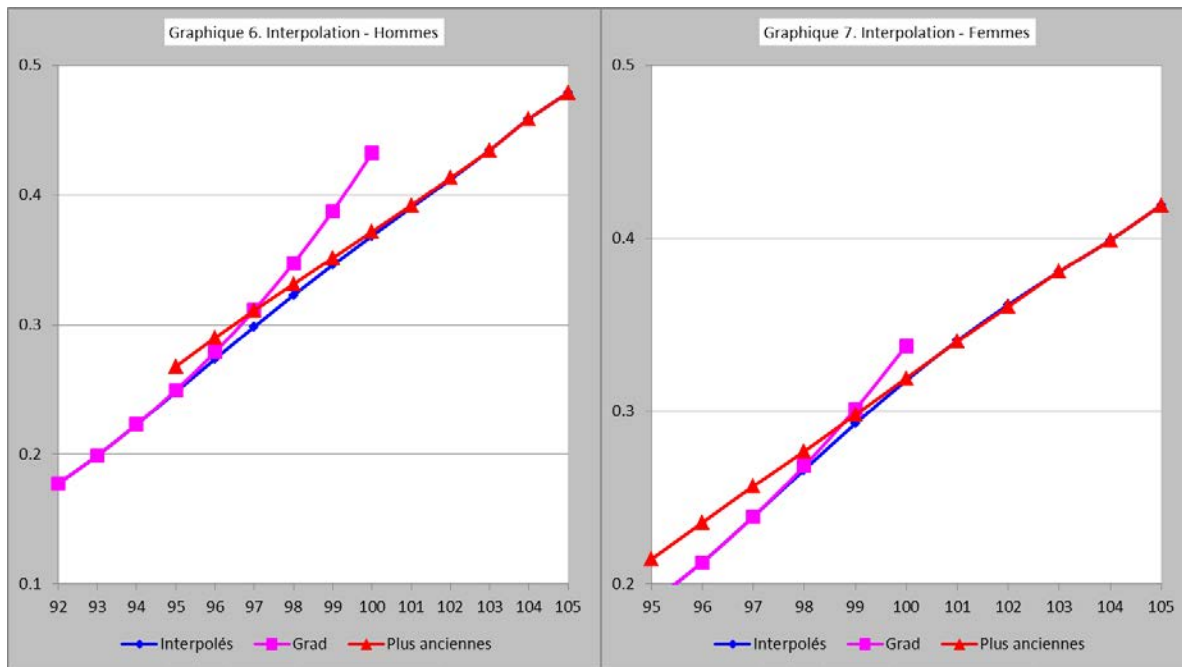
Les taux pour les âges plus avancés proviennent du document que j'ai présenté au colloque « Living to 100 » en 2011 au sujet de la mortalité aux âges les plus avancés. Ce document propose des taux de mortalité pour les âges supérieurs à 95 ans pour plusieurs pays d'après des

enregistrements de décès bruts, lesquels ont été obtenus sur le site www.mortality.org. J'ai utilisé les enregistrements de décès uniquement parce qu'ils m'apparaissent être fiables en raison de l'exigence juridique relative à la déclaration des décès. Par contre, les expositions aux âges les plus avancés sont généralement réputées non fiables pour les données du recensement. Les enregistrements de décès pertinents concernent la population canadienne, et non seulement les retraités. L'utilisation de données sur la population ne constitue pas une préoccupation parce que de nombreuses études démontrent que les taux de mortalité de sous-ensembles variés tendent à converger les uns envers les autres aux âges les plus avancés.

Les taux énoncés dans le document sont utilisés sans modifications pour les 103 ans et plus. Les taux à ces âges très avancés semblent très semblables pour une vaste gamme d'ensembles de données. Les taux de mortalité semblent également bien correspondre aux taux gradués.

La table se termine à un taux de 1 à 115 ans. Certaines tables récentes se rendent à un âge plus avancé; toutefois, il n'existe presque aucune différence au chapitre des valeurs actuarielles actualisées jusqu'à ce que l'âge atteint dépasse 105 ans. Une seule Canadienne a atteint l'âge exact de 116 ans; elle est décédée avant l'âge de 118 ans. Aucun homme canadien n'a encore atteint l'âge de 112 ans.

Les taux pour les hommes de 95 à 102 ans sont obtenus en faisant correspondre un polynôme du 4^e degré aux taux déjà obtenus pour les 92, 93, 94, 103 et 104 ans. Pour les femmes, les taux pour les 98 à 102 ans proviennent d'une valeur cubique fondée sur les 95, 96, 97, 103 et 104 ans. Les interpolations sont présentées aux graphiques 6 et 7.



12. FACTEURS D'AJUSTEMENT SELON LA TAILLE

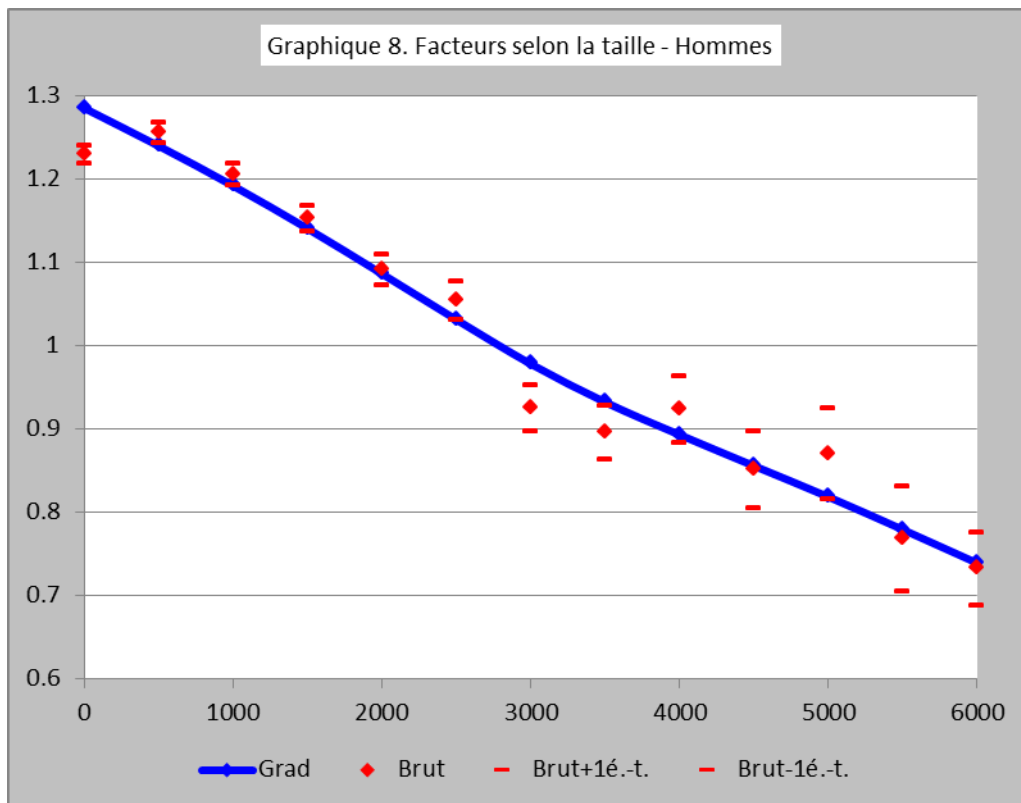
Nos données étant individuelles et assorties de montants de rente mensuelle, nous pouvons observer la variation de la mortalité selon la taille de la rente. Pour faciliter l'analyse, j'ai fragmenté les données en tranches de taille, la première de 10 \$ à 499 \$ par mois, la deuxième de

500 \$ à 999 \$, la troisième de 1 000 \$ à 1 499 \$, ..., la treizième et plus élevée, de 6 000 \$ et plus.

Cependant, ces tranches ne sont pas statiques. Elles tiennent plutôt compte de l'augmentation de la rémunération hebdomadaire moyenne (RHM) déclarée dans les séries V1558664 et 281-0026 de CANSIM II. Ces séries m'indiquent la RHM à la fin de chaque année comprise entre 1998 et 2012. J'ai obtenu la valeur à la fin de 2013 d'après la valeur d'octobre 2013 (la plus récente), soit de 919,35 pour la majorer avec la moyenne de l'augmentation d'octobre à décembre en 2011 et 2012. La limite inférieure de la tranche 3 est un revenu mensuel de 1 000 \$ en 2014. Pour les données de 2000, par exemple, j'ai utilisé 6 702 \$ comme limite inférieure ($1\ 000 \times 647,02 / 922,29$, ces chiffres étant la limite inférieure de la tranche et la RHM pour le début de 2000 et 2014). Les limites réelles de chaque tranche varient à chaque année d'expérience. Les données sont résumées par tranches pertinentes, indexées à la hauteur de la RHM.

Soit dit en passant, la RHM est bien adaptée. L'augmentation moyenne de la RHM au cours de la période de neuf ans comprise entre 1999 et 2008 s'élève à 2,6 %. La hausse de la rente mensuelle moyenne dans les données au cours de la même période est respectivement de 2,8 %, 3,0 %, 2,9 % et 1,6 % pour les hommes (secteur public), les femmes (secteur public), les hommes (secteur privé) et les femmes (secteur privé).

Dans le graphique 8, les losanges rouges correspondent, pour chaque tranche de taille, au ratio approximatif des décès réels par rapport à prévus d'après la table construite ci-dessus. Les tirets rouges représentent un écart-type au-dessus et en-dessous des ratios R/P moyens. Il est évident que la mortalité est significativement plus élevée pour les plus petits montants que pour les plus gros montants.



Je dois prendre une brève pause pour expliquer le concept des ratios R/P que j'ai mentionnés dans le paragraphe précédent. Ils se calculent autrement qu'ils le sont habituellement à trois égards :

1. Ils s'appuient sur les mêmes données que celles utilisées pour construire la table de mortalité. Ils sont donc ajustés en fonction de l'amélioration et de l'industrie et pour normaliser la distribution selon le montant à chaque âge.
2. Le calcul se fait aux âges de 60 à 95 ans seulement.
3. Il y a un facteur additionnel, variant selon l'âge, qui limite l'effet aux âges très avancés. Cela est fait car nous constatons que la variation selon la taille semble beaucoup moindre aux âges avancés. La formule utilisée figure ci-dessous. Le ratio R/P correspond donc à $1 + b$.

Nous voulons trouver le facteur b , pour les données dans une tranche de taille en particulier, de telle sorte que :

$$\sum E(x)[q(x)(1 + bg(x))] = \sum D(x)$$

$$b = \frac{\sum D(x) - \sum E(x)q(x)}{\sum E(x)q(x)g(x)} \quad \dots \text{formule 1}$$

où

$D(x)$ représente les décès à l'âge x ,

$E(x)$ correspond à l'exposition à l'âge x ,

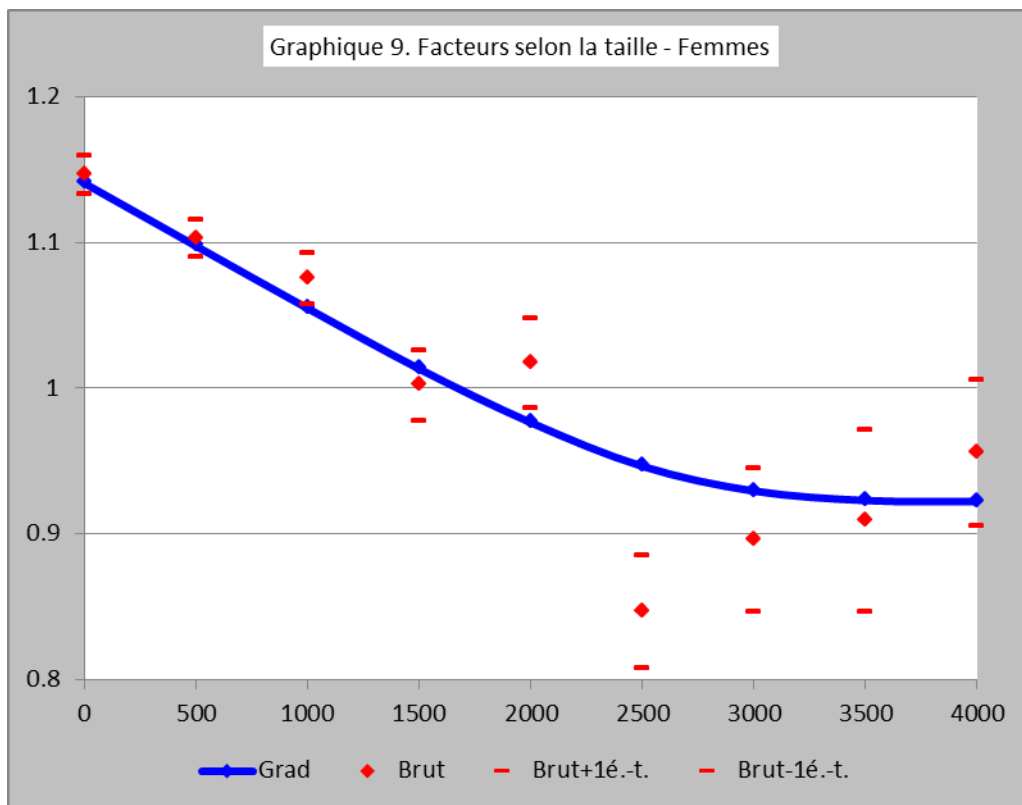
$q(x)$ indique la mortalité sur la table de base à l'âge x ,

$r(x)$ représente le taux de mortalité brut = $D(x) / E(x)$

$g(x)$ est un facteur qui atténue l'effet aux âges plus avancés. Il correspond à 1,0 à 85 ans, à 0,0 à compter de 100 ans et il fait l'objet d'une interpolation linéaire entre ces âges.

La ligne en bleu représente les facteurs d'ajustement de la taille graduée. La graduation renfermait un facteur de lissage de 10 et un degré de 2. Les expositions étaient les coefficients de pondération pour la graduation.

Les chiffres comparables pour les femmes figurent au graphique 9. Il convient de noter que j'affiche moins de tranches pour les femmes que pour les hommes. J'ai limité les tranches à celles pour lesquelles il semble exister suffisamment de données pour dégager une tendance selon la taille avec une assez bonne clarté. La tranche la plus élevée comprend toutes les rentes d'un montant égal ou supérieur à la limite inférieure de cette tranche. Toutes les tranches moins élevées augmentent uniformément de 500 \$.



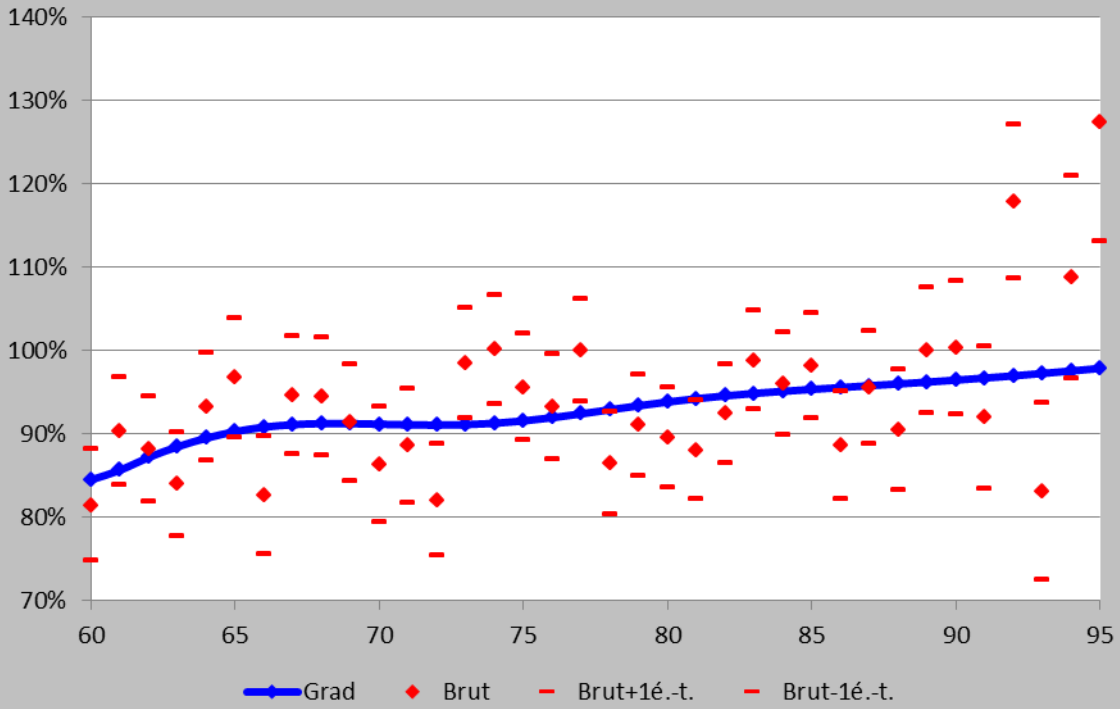
13. TABLES DISTINCTES SELON LE SECTEUR

Il existe suffisamment de données pour construire des tables distinctes pour le secteur public et le secteur privé, pour les hommes, et c'est ce que j'ai fait, comme suit :

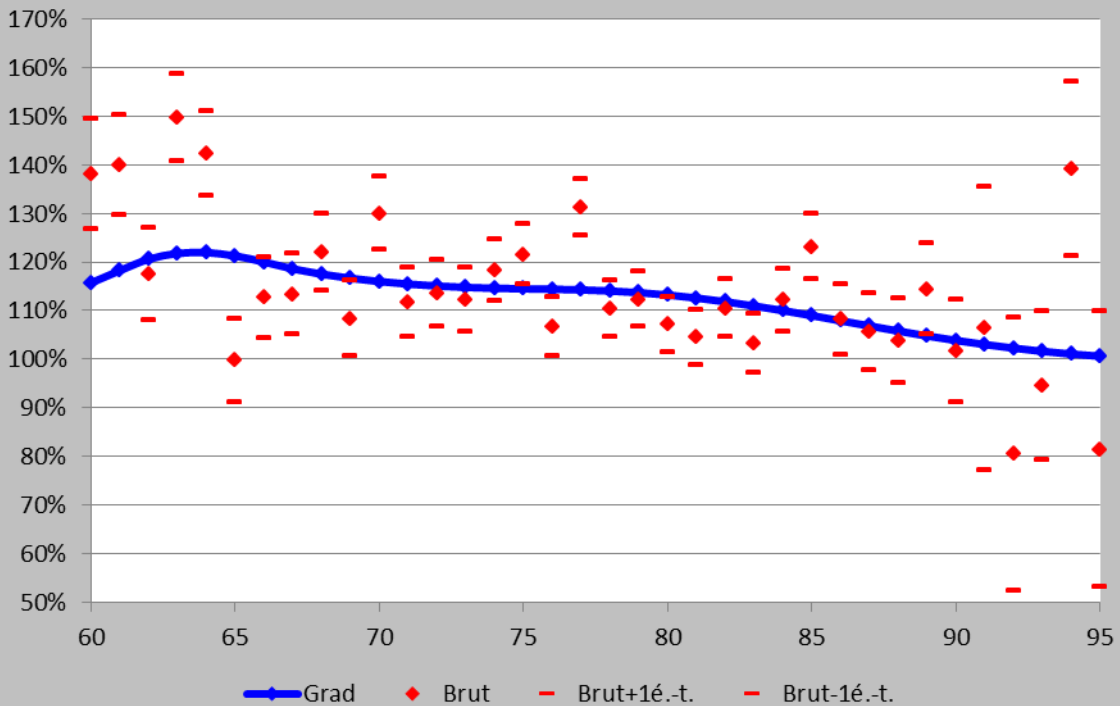
1. J'ai gradué la mortalité à partir des données modifiées de la même façon que pour la table composée.
2. J'ai déterminé le ratio réel sur prévu pour le secteur à l'aide des données modifiées et prévues selon la table composée pour les 60 à 95 ans à l'aide de la formule 1. Je désigne ce ratio ci-après « facteur sectoriel ». Le facteur appliqué au secteur public est 0,92562 pour les hommes du secteur public et 1,13457 pour les hommes du secteur privé.
3. J'ai fixé les taux de mortalité sectoriels distincts à un niveau équivalant aux taux de mortalité combinés, multipliés par le facteur sectoriel pour les âges en deçà de 54 ans.
4. J'ai utilisé les taux de mortalité gradués pour les âges de 61 à 94 ans.
5. J'ai fixé les taux sectoriels distincts au niveau des composés pour les âges 103 et supérieurs.
6. J'ai interpolé les taux pour les 55 à 60 ans et les 95 à 102 ans de la même façon que pour la table composée.

Dans les graphiques 10 et 11, les tables graduées, sous forme de ratios à la table composée, sont indiquées par les traits bleus. Les losanges rouges représentent les taux de mortalité bruts déterminés à partir des données modifiées, et les tirets indiquent un écart-type au-dessus ou en-dessous de la moyenne.

Graphique 10. Ratios de CPM2014 - Hommes secteur public



Graphique 11. Ratios de CPM2014 - Hommes secteur privé

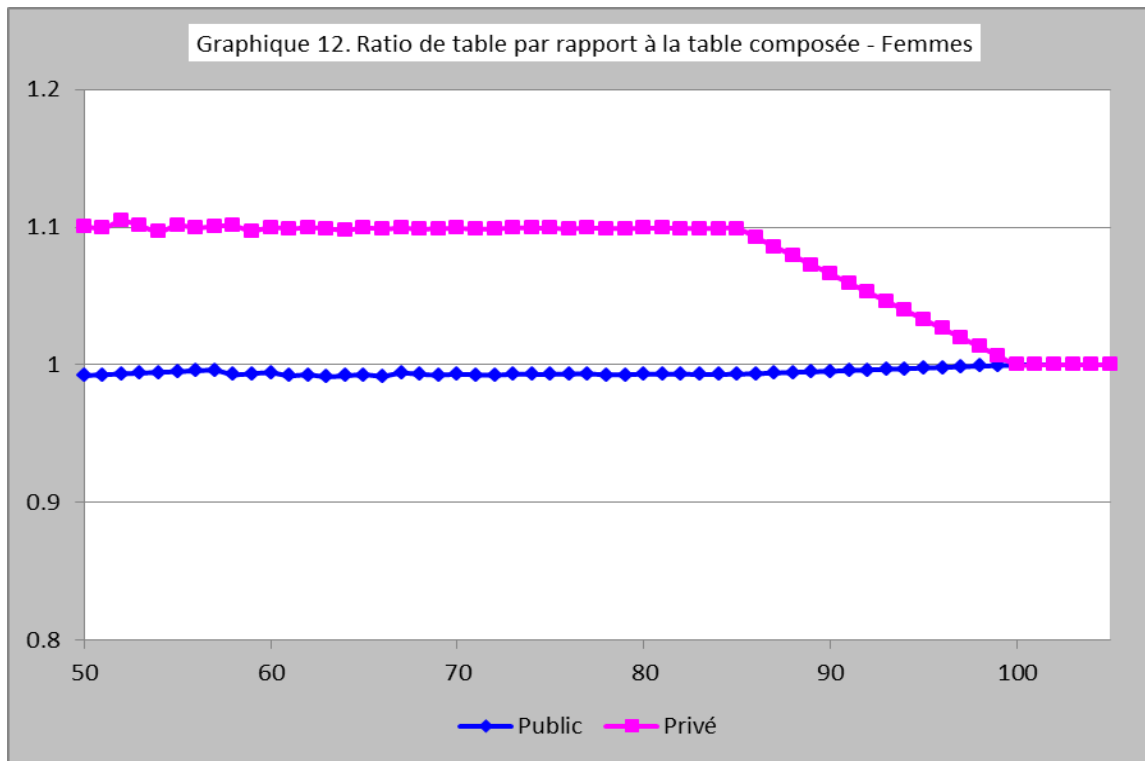


J'ai également calculé les facteurs d'ajustement selon la taille pour les hommes du secteur public et du secteur privé de la même façon que pour la table composée pour les hommes.

Les données concernant les femmes dans le secteur privé ne sont pas suffisantes pour appuyer la construction d'une table. Le mieux que je puisse faire est de déterminer un multiple de la table composée. Étant donné que les tables des secteurs public et privé sont chacun un complément pour l'autre en ce qui concerne la table composée, il est logique de recourir à la même méthode pour les deux, quoique la graduation d'une table d'une femme du secteur public puisse être justifiée.

J'ai déterminé des facteurs sectoriels pour les femmes de la même façon que pour les hommes. Les facteurs sont 0,99321 (secteur public) et 1,09923 (secteur privé). J'ai appliqué ces facteurs aux âges inférieurs à 86 ans, j'ai utilisé un ratio de 1,0 pour tous les âges de plus de 99 ans et j'ai interpolé le ratio linéairement pour les âges qui suivent.

Le graphique 12 présente les tables des femmes des secteurs public et privé comme des ratios de la table composée.



Les tables de mortalité étant un multiple de la table composée, il est logique que les facteurs d'ajustement de la taille soient aussi un multiple de ceux pour la table composée.

Nous voulons trouver le facteur m de sorte qu'en faisant la somme pour tous les âges et toutes les tranches,

$$\sum E(x, b)q(x)(1 + (mf(b) - 1)g(x)) = \sum D(x, b)$$

$$m = \frac{\sum D(x, b) - \sum E(x, b)q(x)(1 - g(x))}{\sum E(x, b)q(x)g(x)f(b)} \quad \dots \text{formule 2}$$

où

$D(x,b)$ correspond aux décès à l'âge x dans la tranche b ,

$E(x,b)$ correspond à l'exposition à l'âge x dans la tranche b ,

$q(x)$ indique la mortalité sur la table distincte selon le secteur à l'âge x ,

$g(x)$ est un facteur qui atténue l'effet aux âges plus avancés. Il correspond à 1,0 à 85 ans, à 0,0 à compter de 100 ans et il fait l'objet d'une interpolation linéaire aux âges intermédiaires.

$f(b)$ est le facteur d'ajustement selon la taille pour la table composée.

14. TABLES DISTINCTES SELON LE COL

La sous-commission a reçu beaucoup de commentaires à propos de sa version précédente à l'effet que les membres préféreraient des tables pour les employés à col blanc et à col bleu plutôt que des tables pour les secteurs public et privé. Nous sommes d'accord. Cependant, les données indiquant les employés horaires et les salariés étaient très limitées. Quant aux autres, il n'y a aucune façon infaillible d'effectuer la séparation.

Il convient de souligner que la démarcation entre les cols bleus et les cols blancs est rarement nette. Le Retirement Plans Experience Committee (RPEC) (*comité sur l'expérience des régimes de retraite*) de la Society of Actuaries a défini « un régime pour cols bleus » comme un régime ayant au moins 70 % d'employés horaires, « un régime pour cols blancs » comme un régime ayant au moyen 70 % d'employés salariés et tous les autres comme « un régime mixte ». Or, le RPEC a un avantage par rapport à nous car il a accès à l'information selon le régime. Pour notre part, nous sommes seulement en mesure de faire des déductions fondées sur des regroupements sectoriels.

Nous avons divisé les enregistrements indiquant les employés horaires ou salariés comme ci-dessus. Nous avons réparti tous les autres enregistrements en regroupements de cols selon l'industrie. Nous avons classé dans les régimes pour cols bleus les industries suivantes : agriculture et exploitation minière, construction, fabrication, transport et communications, commerce de détail et de gros, et services de police et d'incendie. Dans les régimes pour cols blancs, nous avons classé les établissements d'enseignement, les finances et les assurances. Ainsi, les catégories services, administration publique et inconnu ont été classées dans les régimes mixtes. Nous avons longuement discuté de cette répartition et à la fin, nous n'étions pas persuadés de l'exactitude de notre démarche et nous n'avons accès à aucune donnée pouvant nous aider à cette fin.

Compte tenu de l'incertitude de la répartition, nous recommandons de n'utiliser aucune table distincte selon le col, mais nous avons mentionné qu'il importerait d'indiquer dans beaucoup plus d'enregistrements la proportion d'employés horaires ou salariés dans le cadre de notre prochaine étude.

15. TRANSITION – ÉCHELLE À UNE DIMENSION

La sous-commission a élaboré une échelle d'amélioration à deux dimensions désignée CPM-B. À notre avis, une échelle à deux dimensions est supérieure à une échelle à une dimension, car elle peut témoigner des récents taux d'amélioration élevés sans être tenue de le faire indéfiniment. Toutefois, nous reconnaissons également que les actuaires ne jouissent pas tous d'un accès immédiat au logiciel qui peut accepter une échelle d'amélioration à deux dimensions.

Par conséquent, à titre de mesure transitoire jusqu'en 2016, la sous-commission m'a demandé d'élaborer une échelle d'amélioration à une dimension qui propose une approximation suffisamment proche des résultats de l'échelle à deux dimensions.

Même si le présent document porte surtout sur ma démarche pour élaborer les tables de mortalité et les facteurs d'ajustement de la taille, je documente ici l'échelle d'amélioration de transition par souci de commodité.

Élaboration d'une échelle à une dimension

L'échelle de transition devrait déboucher approximativement sur les mêmes valeurs de rentes que celles qui sont proposées. D'où la méthode suivante : trouver des taux d'amélioration à une dimension qui donnent les mêmes valeurs de rentes qu'une échelle à deux dimensions.

Puisque les taux d'amélioration à l'âge le plus avancé de l'échelle à deux dimensions sont zéro, il est évident que les taux de l'échelle à une dimension seront de zéro à cet âge. Le premier taux d'amélioration qui ne sera pas zéro sera le taux de l'échelle à deux dimensions pour cet âge en 2015. Le taux d'amélioration pour l'année précédente peut être établi car il ne reste qu'une inconnue, le taux d'amélioration pour cet âge. La méthode appliquée est une formule récursive au moyen de laquelle on établit le taux d'amélioration, I_x :

$$a_{x,2d}^{2015} = a_{x,1d}^{2015} = vp_{x,1d}^{2015} \ddot{a}_{x+1,1d}^{2016} = (1 - q_{x,1d}^{base} (1 - I_x)) v \ddot{a}_{x+1,1d}^{2016}$$

La formule ci-dessus fonctionne presque parfaitement pour les rentes viagères. Cependant, lorsqu'on ajoute une période de garantie, une période différée ou une seconde tête pour certains types de rentes réversibles ou lorsqu'on calcule des rentes différées, l'approximation n'est pas aussi bonne, plus particulièrement pour une longue période différée.

Il est important de se rappeler que cette échelle à une dimension n'existe que pour utiliser de façon approximative une échelle raisonnable à deux dimensions. Il n'est pas possible de construire une approximation applicable à toutes les situations. Un exemple d'approximation moins qu'idéale a trait à l'évaluation des participants actifs pour lesquels il existe une prestation de décès équivalant à la valeur actualisée de la rente jusqu'à l'âge de la retraite. La valeur ne dépend pas dans une large mesure des taux de mortalité avant l'âge de la retraite. Cependant, les taux de mortalité après le départ à la retraite sont projetés sensiblement plus loin qu'une rente viagère ne l'est maintenant à l'âge de la retraite. Puisque les taux d'amélioration à une dimension sont ajustés pour une rente immédiate, et qu'ils diminuent au fil du temps dans l'échelle à deux dimensions, les valeurs actualisées des rentes différées qui sont indépendantes de la mortalité avant la retraite seront surestimées en utilisant l'échelle approximative.

Il convient de noter que cette échelle à une dimension contient des taux négatifs d'amélioration pour les hommes âgés de 50 à 55 ans. Ce fait montre que l'échelle à une dimension n'est pas raisonnable en soi. Il s'agit d'un fait mathématique fictif élaboré afin d'approximer l'échelle à deux dimensions proposée, lequel sera à propos pendant les deux prochaines années pour les évaluations de rentes et de valeurs actualisées de prestations de retraite. Il se peut qu'il ne convienne pas à d'autres fins; en particulier, il ne produira *pas* de taux de mortalité raisonnables à tous les âges.

16. RÉSULTATS

Les tables 5, 6 et 7 comparent les valeurs actualisées des rentes mensuelles immédiates à 4 % pour le début de 2014, 2015 et 2016 pour les rentes viagères avec et sans période de garantie et pour les rentes réversibles qui diminuent au décès du participant.

À notre avis, l'approximation est suffisamment proche pour être acceptable aux fins d'évaluation des rentes avant le 1^{er} janvier 2016.

Table 5. Rente viagère mensuelle immédiate à 4 %

| Âge | 2014 01 01 | | | 2015 01 01 | | | 2016 01 01 | | |
|-----|------------|--------|----------|------------|--------|----------|------------|--------|----------|
| | Exacte | Approx | Δ | Exacte | Approx | Δ | Exacte | Approx | Δ |
| M45 | 19.79 | 19.79 | 0.00% | 19.80 | 19.80 | 0.00% | 19.82 | 19.82 | 0.00% |
| M55 | 17.36 | 17.36 | 0.00% | 17.39 | 17.39 | 0.00% | 17.41 | 17.41 | 0.01% |
| M65 | 14.17 | 14.17 | 0.00% | 14.21 | 14.21 | 0.00% | 14.25 | 14.25 | 0.02% |
| M75 | 10.03 | 10.03 | 0.00% | 10.08 | 10.08 | 0.00% | 10.13 | 10.13 | 0.03% |
| F45 | 20.52 | 20.52 | 0.00% | 20.53 | 20.53 | 0.00% | 20.54 | 20.54 | 0.00% |
| F55 | 18.23 | 18.23 | 0.00% | 18.24 | 18.24 | 0.00% | 18.26 | 18.26 | 0.00% |
| F65 | 15.13 | 15.13 | 0.00% | 15.16 | 15.16 | 0.00% | 15.18 | 15.18 | 0.01% |
| F75 | 11.16 | 11.16 | 0.00% | 11.19 | 11.19 | 0.00% | 11.22 | 11.22 | 0.01% |

Table 6. Rente mensuelle immédiate avec période certaine de 10 ans à 4 %

| Âge | 2014 01 01 | | | 2015 01 01 | | | 2016 01 01 | | |
|-----|------------|--------|----------|------------|--------|----------|------------|--------|----------|
| | Exacte | Approx | Δ | Exacte | Approx | Δ | Exacte | Approx | Δ |
| M45 | 19.87 | 19.87 | 0.02% | 19.89 | 19.89 | 0.02% | 19.90 | 19.91 | 0.03% |
| M55 | 17.55 | 17.55 | 0.05% | 17.57 | 17.58 | 0.06% | 17.59 | 17.61 | 0.08% |
| M65 | 14.54 | 14.56 | 0.11% | 14.57 | 14.60 | 0.15% | 14.60 | 14.63 | 0.19% |
| M75 | 11.06 | 11.07 | 0.11% | 11.09 | 11.11 | 0.15% | 11.12 | 11.14 | 0.20% |
| F45 | 20.56 | 20.56 | 0.00% | 20.57 | 20.57 | 0.01% | 20.58 | 20.58 | 0.01% |
| F55 | 18.33 | 18.33 | 0.02% | 18.35 | 18.35 | 0.02% | 18.36 | 18.37 | 0.03% |
| F65 | 15.39 | 15.40 | 0.05% | 15.42 | 15.42 | 0.06% | 15.44 | 15.45 | 0.07% |
| F75 | 11.89 | 11.90 | 0.07% | 11.92 | 11.93 | 0.10% | 11.94 | 11.95 | 0.13% |

Table 7. Rente mensuelle immédiate à 4 % réduite à 60 % au décès du participant

| Âge | 2014 01 01 | | | 2015 01 01 | | | 2016 01 01 | | |
|---------|------------|--------|----------|------------|--------|----------|------------|--------|----------|
| | Exacte | Approx | Δ | Exacte | Approx | Δ | Exacte | Approx | Δ |
| M45-F45 | 20.87 | 20.91 | 0.16% | 20.88 | 20.92 | 0.17% | 20.89 | 20.93 | 0.17% |
| M55-F55 | 18.73 | 18.77 | 0.17% | 18.75 | 18.79 | 0.18% | 18.77 | 18.81 | 0.20% |
| M65-F65 | 15.77 | 15.79 | 0.14% | 15.80 | 15.82 | 0.16% | 15.83 | 15.85 | 0.18% |
| M75-F75 | 11.77 | 11.77 | 0.05% | 11.80 | 11.81 | 0.06% | 11.84 | 11.85 | 0.09% |
| F45-M45 | 21.16 | 21.20 | 0.16% | 21.17 | 21.21 | 0.17% | 21.18 | 21.22 | 0.17% |
| F55-M55 | 19.08 | 19.11 | 0.17% | 19.09 | 19.13 | 0.18% | 19.11 | 19.15 | 0.19% |
| F65-M65 | 16.16 | 16.18 | 0.14% | 16.18 | 16.20 | 0.15% | 16.20 | 16.23 | 0.17% |
| F75-M75 | 12.22 | 12.22 | 0.04% | 12.25 | 12.26 | 0.06% | 12.28 | 12.29 | 0.09% |

17. BIBLIOGRAPHIE

- _____. « List of Canadian supercentenarians ». Wikipédia, consulté le 17 décembre 2013. http://en.wikipedia.org/wiki/List_of_Canadian_supercentenarians
- Commission des rapports financiers des compagnies d'assurance-vie. Document de recherche sur l'amélioration de la mortalité, Institut canadien des actuaires, le 23 septembre 2010. www.cia-ica.ca/docs/default-source/2010/210065f.pdf
- Continuous Mortality Investigation. « CMI Working paper 1. An interim basis for adjusting the 92 series mortality projections for cohort effects », 2002. <http://www.actuaries.org.uk/research-and-resources/documents/cmi-working-paper-1-interim-basis-adjusting-92-series-mortality-pro>
- Hanrahan, Mark S., et al. « The 1994 Uninsured Pensioner Mortality Table », *Transactions of the Society of Actuaries*, The Society of Actuaries, Schaumburg, IL, 1995. Disponible à <http://www.soa.org>
- Howard, R.C.W. « Mortality Rates at Oldest Ages », *Mortality at Oldest Ages*, 2010. <http://www.soa.org/library/monographs/life/living-to-100/2011/mono-li11-5b-howard.pdf>
- _____. « Whittaker-Henderson-Lowrie Graduation », 2007. <http://www.howardfamily.ca/graduation/WHGrad.doc>
- Human Mortality Database. Université de Californie, Berkeley (États-Unis), et Max Planck Institute for Demographic Research (Allemagne), disponible à www.mortality.org ou à www.humanmortality.de (données téléchargées le 21 décembre 2011).
- Jordan, Chester Wallace, Jr. *Life Contingencies*, The Society of Actuaries, Schaumburg, IL, 1967.
- London, D. *Graduation: The Revision of Estimates*, Actex Publications, Winsted and Abingdon, CT, 1985.
- Lowrie, Walter B. « An Extension of the Whittaker-Henderson Method of Graduation », *TSA*, XXXIV (1982), 329.
- Ménard, Jean-Claude. « 26^e Rapport actuariel sur le Régime de pensions du Canada », 2010, disponible à <http://www.osfi-bsif.gc.ca/fra/docs/cpp26.pdf>
- Pelletier, David A. « Communication finale concernant la promulgation de taux prescrits d'amélioration de la mortalité mentionnés dans les Normes de pratique pour l'évaluation du passif des contrats d'assurance : Assurance de personnes (accidents et maladie) (sous-section 2350) », Conseil des normes actuarielles, 2011. www.cia-ica.ca/docs/default-source/2011/211072f.pdf