

## *Document de recherche*

# Le contexte du modèle à générations imbriquées

**Auteurs :**

Doug Andrews  
Steve Bonnar  
Lori Curtis  
Miguel Leon-Ledesma  
Jaideep Oberoi  
Kathleen Rybczynski  
Pradip Tapadar  
C. Mark Zhou

**Octobre 2016**  
**Document 216101**

*This document is available in English.*

© 2016 Institut canadien des actuaires

**Institut canadien des actuaires**

360, rue Albert, bureau 1740 Ottawa, ON K1R 7X7

Tél. : 613-236-8196

Télec. : 613-233-4552

[siege.social@cia-ica.ca](mailto:siege.social@cia-ica.ca)

[cia-ica.ca](http://cia-ica.ca)

*Les documents de recherche ne représentent pas nécessairement l'opinion de l'Institut canadien des actuaires. Les membres doivent connaître les documents de recherche. Les documents de recherche ne constituent pas des normes de pratique et sont donc de caractère non exécutoire. Il n'est pas obligatoire que les documents de recherche soient conformes aux normes. Le mode d'application de normes dans un contexte particulier demeure la responsabilité des membres.*

## Le contexte du modèle à générations imbriquées

### 1 Introduction

#### 1.1 Toile de fond et renseignements supplémentaires

Les baby-boomers, une imposante cohorte qui influe sur la croissance économique depuis six décennies, commencent à peine à prendre leur retraite. Quel sera l'effet du départ à la retraite de cette génération sur la croissance et la valeur des actifs au cours des 30 prochaines années? Le projet de recherche<sup>1</sup>, *Population Aging, Implications for Asset Values, and Impact for Pension Plans: An International Study (Vieillesse de la population, répercussions sur les valeurs des actifs et incidence sur les régimes de retraite : Une étude internationale)*, vise à quantifier l'impact de la structure de la population sur les valeurs des actifs et à projeter cet impact sur certains régimes de retraite au Canada, au Royaume-Uni et aux États-Unis.

Ce projet de recherche est une enquête qui s'étend sur plusieurs années et qui comporte de nombreux sous-projets. Un partenariat international a été conclu entre deux universités, soit l'Université de Waterloo et l'University of Kent, et trois associations actuarielles, soit la Society of Actuaries, l'Institute and Faculty of Actuaries et l'Institut canadien des actuaires. La Society of Actuaries a financé un sous-projet portant sur l'examen de la documentation et la rédaction des spécifications en vue de la première étape du modèle à mettre au point. L'examen de la documentation publiée fait l'objet d'un document distinct.

Le présent document a pour objet de présenter les spécifications du modèle et de solliciter les commentaires des actuaires et des autres parties intéressées, lesquelles peuvent communiquer avec Doug Andrews à l'adresse [dwa007@hotmail.com](mailto:dwa007@hotmail.com).

Le modèle en question est conçu pour générer les rendements du capital risqué compte tenu de l'évolution démographique, les modules élargis produisant un aperçu des répercussions démographiques plus complexes. Par exemple, les différences entre les sexes dans les modèles de retraite, l'espérance de vie, la tolérance au risque et la propension à prendre des risques, ainsi que la composition du ménage sont expliqués dans les ouvrages publiés et peuvent avoir des répercussions importantes sur les écarts de revenu avant et après la retraite. Cependant, ces différences ne sont souvent pas prises en compte dans les modèles économiques, car il est très compliqué de le faire.

#### 1.2 Introduction au modèle

Dans les paragraphes suivants, nous présentons un modèle théorique à générations imbriquées (GI) qui sera l'une des composantes utilisées pour examiner l'impact de l'évolution démographique sur les rendements des catégories d'actifs. Un modèle GI est un type de modèle de croissance d'équilibre dans lequel l'économie comporte au moins une génération

<sup>1</sup> Les auteurs de ce rapport sont Doug Andrews, Steve Bonnar, Lori Curtis, Miguel Leon-Ledesma, Jaideep Oberoi, Kathleen Rybczynski, Pradip Tapadar et Mark Zhou. Ce projet a bénéficié du soutien financier et en nature de l'Institut canadien des actuaires, de l'Institute and Faculty of Actuaries, du Max Planck Institute of Social Law and Social Policy, de la Society of Actuaries, du Conseil de recherche en sciences sociales, de l'University of Kent et de l'Université de Waterloo.

(cohorte) vivant dans une certaine période de temps. Chaque cohorte vit pendant de multiples périodes et ainsi, leur durée de vie chevauche celle d'autres cohortes. Étant donné que le cadre du modèle GI permet de prendre des décisions propres à chaque étape de la vie (p. ex., éducation, fécondité, travail et retraite), c'est un outil utile pour analyser l'affectation des ressources entre les diverses générations.

Les cohortes prennent des décisions à chaque étape de la vie. Certaines décisions sont explicitement modélisées. Les résultats de ces décisions seront donc déterminés dans le cadre du modèle. On parle de décisions endogènes. D'autres décisions ne sont pas intégrées au modèle. Pour ces décisions, nous imposons des contraintes comportementales fixes aux cohortes, même si elles peuvent être de nature probabiliste. On qualifie ces décisions qui ne sont pas déterminées dans le cadre du modèle d'exogènes.

Dans un monde parfait, le modèle GI comporterait de nombreux types de ménage dans chacune des générations et bien des décisions que doivent prendre chaque ménage seraient endogènes au modèle. (Par exemple, un ménage avec enfants devra prendre des décisions qui diffèrent de celles d'un ménage sans enfant.) Malheureusement, l'hétérogénéité à l'intérieur des cohortes complique davantage le cadre et peut générer un modèle sans solution faisable. Il y a donc un compromis entre la granularité ou la complexité du modèle et sa résolubilité.

Avec ce compromis en tête, le modèle proposé comprend un modèle de base avec des extensions, ou modules complémentaires. Des modèles GI semblables à notre modèle de base sont souvent utilisés dans les analyses économiques. Les compléments sont nouveaux dans les ouvrages publiés et par conséquent, élargir les modèles pour les y inclure puis, régler ces modèles plus complexes sera une démarche exploratoire.

Voici les particularités du modèle de base :

- Un type de ménage représentant chaque génération (pas d'hétérogénéité à l'intérieur des cohortes);
- Offre de main-d'œuvre endogène;
- Mortalité exogène;
- Probabilités de retraite exogènes;
- Cinq générations qui se chevauchent;
- Incertitude globale à l'égard de la productivité;
- Deux catégories d'actifs (sans risque et risqué).

Même si les taux de retraite et de mortalité sont imposés dans le modèle, diverses séries d'hypothèses seront envisagées pour évaluer la sensibilité des résultats du modèle à ces hypothèses. Les cinq générations peuvent être assimilées à l'enfance, l'âge des premières années de travail, l'âge des années intermédiaires de travail, l'âge des dernières années de travail et l'âge de la retraite. L'offre de main-d'œuvre est déterminée dans le cadre des trois cohortes intermédiaires, les agents décidant de la participation au marché du travail selon le compromis entre le revenu salarial et les loisirs.

Voici les extraits du modèle :

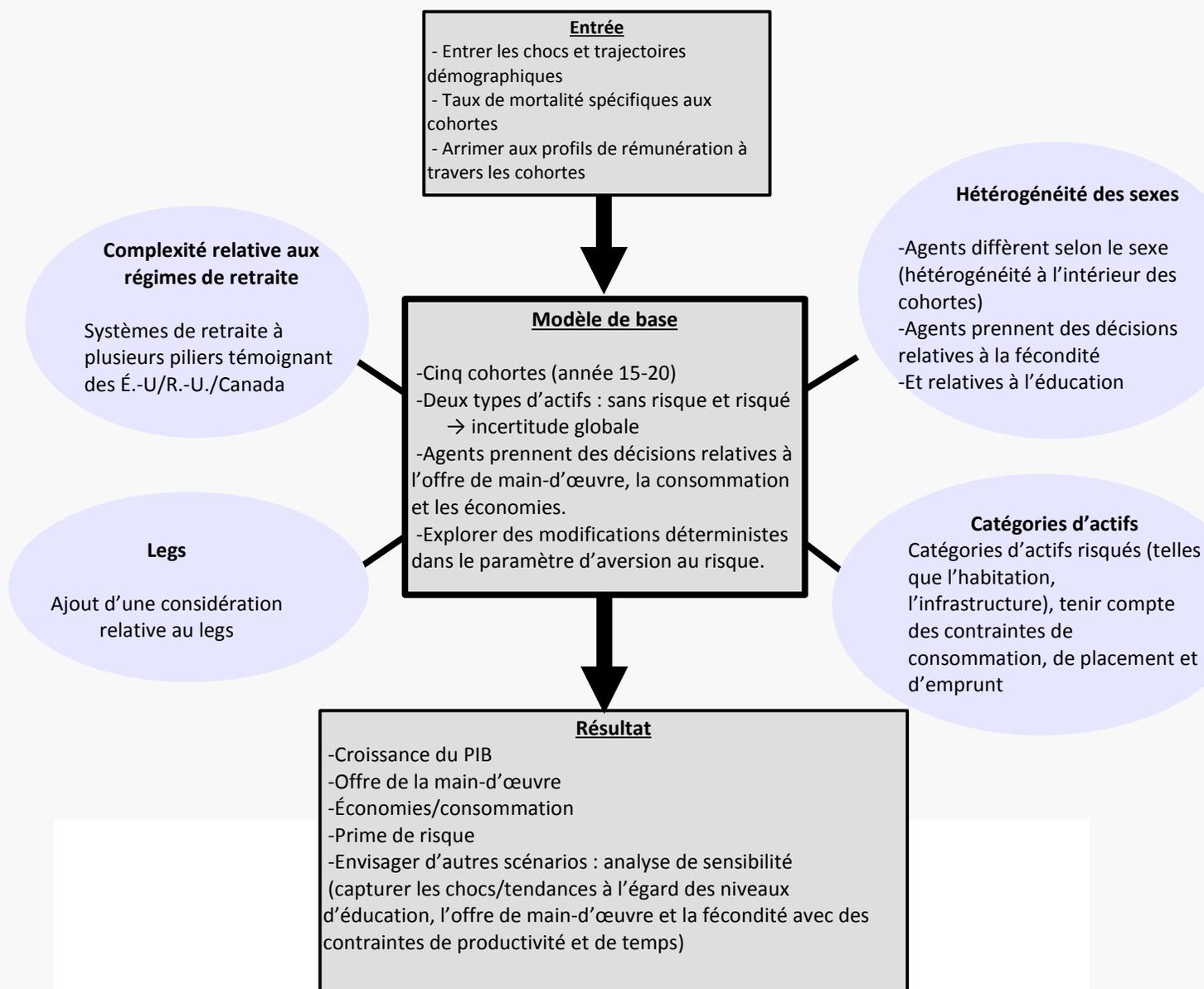
- Croissance du produit intérieur brut (PIB);
- Total des économies;
- Consommation globale;
- Offre de main-d'œuvre globale;
- Rendement des actifs.

Le modèle de base s'appuie sur les données globales de la population, une moyenne pondérée des particularités hommes-femmes. Nous pouvons alors procéder à une analyse de la sensibilité de la façon dont l'évolution de la part de la population qu'occupent les femmes, le marché du travail et les décisions/résultats au chapitre de la fécondité influent sur les résultats avec le temps, au fur et à mesure que la population vieillit. Se reporter à la Figure 1 (les cases en gris du milieu).

Les extensions proposées au modèle de base (ovales en bleu dans la Figure 1) incluent l'hétérogénéité des sexes, l'augmentation de la complexité des régimes de retraite proposés, l'ajout de legs et l'analyse d'autres catégories d'actifs. Les extensions peuvent devoir être explorées une à une et/ou dans le cadre d'un modèle de base simplifié. À notre connaissance, chacune des extensions nous permettrait de bien mieux comprendre les répercussions du vieillissement de la population.

Une description théorique détaillée du modèle GI de base figure dans la prochaine section. Un glossaire se trouve en annexe.

Figure 1 : Modèle de base (gris) et certaines extensions possibles (bleu)



## 2 Modèle de base

### 2.1 Données démographiques

La période de temps visée dans le modèle est discrète. Pendant chaque période de 20 ans, le secteur des ménages est constitué de cinq cohortes imbriquées entre les âges 0 et 99. Nous utilisons la valeur  $j \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$  pour indiquer l'âge des cohortes : 0 : enfance; 1 : âge des premières années de travail; 2 : âge des années intermédiaires de travail; 3 : âge des dernières années de travail et 4 : âge de la retraite.

Dans ce modèle de base, l'hétérogénéité n'existe qu'entre les cohortes; autrement dit, il n'y a aucune hétérogénéité au sein des cohortes. Nous avons donc un ménage représentatif  $j$  pour chaque période  $t$ . La taille du ménage correspond à  $N_{j,t}$ , qui représente la taille de la cohorte  $j$  à la période  $t$ . À chaque période  $t$ , une nouvelle génération âgée  $j = 0$  (0 à 19 ans) naît dans l'économie et les générations en place passent toutes à une étape de vie supérieure. Le taux exogène de la croissance de la population de la nouvelle génération  $j = 0$  dans la période  $t$ , est indiqué par  $n_t$ , que nous associerons dorénavant au taux de fécondité dans le modèle. Chaque ménage à l'âge  $j$  a une probabilité marginale exogène  $\phi_{j,t}$  d'atteindre l'âge  $j + 1$  dans la période  $t + 1$ . La génération la plus âgée,  $j = 4$ , décède de manière déterministe dans la période subséquente, c.-à-d.,  $\phi_{4,t} = 0$ . Puis, la population dans la période  $t$  s'exprime comme suit :

$$N_{j,t} = \begin{cases} (1 + n_t)N_{0,t-1}, & \text{if } j = 0, \\ \phi_{j-1,t-1}N_{j-1,t-1}, & \text{if } j \in \{1, 2, 3, 4\}, \\ 0, & \text{if } j > 4, \end{cases} \quad (1)$$

Et la part de la population de chaque cohorte  $j$ , dans la période  $t$  se calcule ainsi :

$$\mu_{j,t} = \frac{N_{j,t}}{\sum_{i=0}^4 N_{i,t}}. \quad (2)$$

## 2.2 Ménages

Les enfants,  $j = 0$ , ne sont pas des décideurs actifs. À chaque âge de travailler, chaque ménage représentatif (pour  $j = 1, 2, 3$ ) a des unités de temps constantes fixes  $H$  à consacrer au travail et aux loisirs. En outre, aux âges des premières années de travail et des années intermédiaires de travail  $j = 1, 2$ , le ménage consacre obligatoirement  $FC_{j,t}$  unités de temps par période de fécondité (qu'on peut assimiler au temps requis pour l'éducation des enfants). De plus, à l'âge des premières années de travail  $j = 1$ , le ménage représentatif est tenu de consacrer  $FE_{j,t}$  unités de temps à l'éducation. Donc, nous avons  $FC_{j,t} = 0$  si  $j \notin \{1, 2\}$  et,  $FE_{j,t} = 0$  si  $j \neq 1$ . Les deux valeurs  $FC_{j,t}$  et  $FE_{j,t}$  sont données de façon exogène.

Dans chacun des âges de travailler,  $j \in \{1, 2, 3\}$ , le ménage représentatif fournit de la main-d'œuvre à l'entreprise représentative et gagne un revenu salarial selon l'efficacité de leur main-d'œuvre  $\varepsilon_{j,t}$ , qui est donnée de façon exogène. À compter de  $j = 3$  (de 60 à 79 ans), le ménage touche un certain revenu de retraite. Les retraités ( $j = 4$ ) ne fournissent aucune main-d'œuvre et consacrent tout leur temps libre aux loisirs avec le revenu de retraite.

Deux actifs financiers font office d'entrepôt de la valeur pendant chaque période de temps. Disons que  $a_{j,t}$  et  $a_{j,t}^r$  représentent les premiers actifs (sans risque) et les deuxièmes actifs (risqués) que détient le ménage de l'âge  $j$  au début de la période  $t$ , respectivement. Les rendements nets correspondants de ces deux actifs à la période  $t$  sont indiqués par  $r_t$  et  $r_t^r$ . Les

jeunes travailleurs  $j = 1$  entrent dans l'économie sans détenir un seul actif, c.-à-d.,  $a_{1,t} = a_{1,t}^r = 0$ . De plus, les retraités quittent l'économie sans détenir d'actif, c.-à-d.,  $a_{5,t} = a_{5,t}^r = 0$ .

On peut penser que détenir des actifs sans risque représente une façon sécuritaire d'épargner et la valeur peut être négative, ce qui laisse entendre que les ménages peuvent emprunter. L'épargne nette correspond aux obligations émises par les gouvernements qui servent à financer les dépenses gouvernementales et qui doivent être positives :

$$B_{t+1} = \sum_{j=1}^4 a_{j+1,t+1} N_{j,t}.$$

(3)

Le deuxième actif financier est risqué au plan de l'incertitude globale. Dans ce modèle de base, nous supposons que la seule incertitude globale est attribuable à des chocs sur la productivité dont il sera davantage question à la sous-section sur la production. Sans perte de généralité, les actifs risqués que détient un ménage pourrait s'entendre du capital qu'il possède. Il convient de souligner que  $a_{j,t}^r \geq 0$  et la somme correspondent au stock de capital global à la période  $t$ ,  $K_t$ .

$$K_{t+1} = \sum_{j=1}^4 a_{j+1,t+1}^r N_{j,t}.$$

(4)

Nous supposons qu'il n'y a aucun motif de legs/d'héritage dans le modèle de base. Si un ménage décède accidentellement, son patrimoine net est perçu par le gouvernement plutôt qu'hérité. Le gouvernement perçoit tous les actifs résiduels de la fraction de la population qui a perdu la vie et s'en sert dans le cadre de ses revenus généraux.

Voici l'échéancier du modèle. Au début de chaque période  $t$ , les actifs détenus par le ménage  $j$  sont  $a_{j,t}$  et  $a_{j,t}^r$ , qui sont ramenés de la période  $t - 1$ . Pendant la période, le ménage fournit de la main-d'œuvre à l'entreprise et gagne un revenu proportionnel à son efficience, à ses heures et au salaire du marché. À la fin de la période  $t$ , le total des ressources disponibles du ménage comprend le rendement brut de  $a_{j,t}$  et  $a_{j,t}^r$ , le revenu salarial et le revenu de retraite, déduction faite des dépenses de consommation des enfants  $c_{0,t}$ , moins les impôts. Puis, le ménage détermine la façon dont il veut répartir ces ressources à la consommation,  $c_{j,t}$ , et à la détention d'actifs à la période suivante,  $\{a_{j+1,t+1}, a_{j+1,t+1}^r\}$ . L'agrégation de  $\{a_{j+1,t+1}, a_{j+1,t+1}^r\}_{j=1}^4$  est utilisée pour financer les nouvelles obligations gouvernementales  $B_{t+1}$  et le capital  $K_{t+1}$ . Les décès surviennent à la fin de la période et les actifs résiduels de la fraction de la population décédée sont perçus par le gouvernement et indiqués par  $\xi_t$ .

Dans chaque période, les ménages optimisent l'utilité du temps de vie qu'ils prévoient leur rester sous réserve des limites de temps et de budget qui leur sont propres. En outre, les ménages sont assujettis à plusieurs taxes et impôts.  $\tau_t^c$ ,  $\tau_t^h$  et  $\tau_t^p$  sont des taxes et impôts proportionnels donnés de façon exogène sur la consommation, le revenu de travail et le revenu de pension à la période  $t$ , respectivement. La valeur  $\tau_t^s$  correspond au taux de cotisation exogène pour le régime de pension de l'État. Le revenu salarial brut (avant impôt) d'un ménage est le produit du taux salarial  $w_t$  et du volume de travail efficace  $\varepsilon_{j,t}h_{j,t}$ . À l'âge des dernières années de travail  $j = 3$ , outre toucher les prestations de retraite  $p_t^p$ , le ménage détermine la proportion du total  $\iota_t^p H$  des unités de temps à consacrer au travail. Ainsi, la valeur  $\iota_t^p$  représente la part maximale de la période qu'un ménage à l'âge des dernières années de travail pourrait travailler dans la période  $t$ .

### 2.3 Production

À chaque période, une entreprise représentative utilise la main-d'œuvre  $H_t$ , dans des unités efficaces et le capital physique  $K_t$  pour produire les biens dans leur forme finale  $Y_t$ . Nous supposons une fonction de production Cobb-Douglas et aucun coût d'ajustement du capital :

$$Y_t = A_t K_t^\alpha H_t^{1-\alpha},$$

où  $\alpha \in (0, 1)$  est la part du capital et  $A_t$  la productivité factorielle totale.

Le volume global de main-d'œuvre efficace à la période  $t$ ,  $H_t$ , correspond à ce qui suit :

$$H_t = \sum_{j=1}^3 \varepsilon_{j,t} h_{j,t} N_{j,t}.$$

(5)

Le comportement de l'entreprise qui cherche à maximiser ses bénéfices donne lieu à des décisions de premier ordre qui déterminent le taux de rendement réel du capital, moins l'amortissement, et le taux salarial réel par unité de main-d'œuvre efficace, respectivement :

$$r_t^r = \alpha A_t K_t^{\alpha-1} H_t^{1-\alpha} - \delta, \quad (6)$$

$$w_t = (1 - \alpha) A_t K_t^\alpha H_t^{-\alpha}. \quad (7)$$

où  $\delta \in (0, 1)$  représente le taux d'amortissement.

### 2.4 Système de sécurité sociale

Le système de sécurité sociale verse la rente publique  $p_t^p$  au ménage à l'âge des dernières années de travail (à l'âge  $j = 3$ ) à la période  $t$ . Il convient de souligner qu'un retraité  $j = 4$  à la période  $t$  touche la rente publique  $p_{t-1}^p$ . Dans chaque période  $t$ , la rente publique  $p_t^p$  est fonction du revenu salarial historique de la cohorte  $j = 3$  pendant les deux premières périodes de travail, aux âges des premières années et des années intermédiaires de travail.

Le coût des prestations de la rente publique est entièrement couvert par le système de sécurité sociale. Le système ajuste les taux de cotisation aux fins de la rente publique,  $\tau_t^s$ , de sorte que l'équilibre budgétaire de la rente publique soit maintenu de façon distincte à chaque période.

## 2.5 Gouvernement

Le gouvernement émet des obligations sans risque d'une période, reçoit les actifs résiduels du pourcentage de la population décédée et perçoit des taxes et impôts sur la consommation et la main-d'œuvre pour financer le remboursement des intérêts des obligations déjà émises et de ses dépenses  $G_t$ , donnés de façon exogène. L'émission des obligations gouvernementales est ajustée de sorte que la contrainte budgétaire consolidée suivante existe dans chaque période :

$$B_{t+1} + \xi_t + \tau_t^c C_t + \tau_t^h w_t H_t = G_t + (1 + r_t) B_t, \quad (8)$$

où  $B_t$  représente les obligations gouvernementales au début de la période  $t$  et correspond aux économies nettes du ménage.  $C_t$  est la consommation globale à la période  $t$ .

## 2.6 Équilibre concurrentiel récursif

Au début de chaque période, la situation de l'économie peut être qualifiée par l'état

$$\{\{a_{j,t}, a_{j',t}, \varphi_{j,t}, N_{j,t}, \mu_{j,t}, FC_{j,t}, FE_{j,t}\}_{j=0}^4, K_t, n_t, \xi_t, p_t^p, p_t^{p-1}, A_t, \varepsilon_{j,t}, l_t^p, \tau_t^c, \tau_t^h, \tau_t^p, G_t, B_t\}$$

Définir l'**équilibre concurrentiel récursif** sous forme des séquences de prix  $\{w_t, r_t, r_t^r\}_{t=0}^\infty$ , des affectations  $\{C_t, H_t, K_{t+1}, B_{t+1}\}_{t=0}^\infty$ , des règles régissant les décisions des ménages  $\{\{c_{j,t}\}_{j=1}^4, \{h_{j,t}, a_{j+1,t+1}, a_{j',t+1,t+1}\}_{j=1}^3\}_{t=0}^\infty$ , de la structure démographique  $\{\{N_{j,t}\}_{j=0}^4\}_{t=0}^\infty$ , des rentes  $\{p_t^p, \tau_t^s\}_{t=0}^\infty$ , et des actifs résiduels du pourcentage de la population décédée  $\{\xi_t\}_{t=0}^\infty$ , de sorte que, dans chaque période, les conditions suivantes soient réunies :

1. Chaque cohorte règle le problème de l'optimisation des préférences;
2. L'entreprise optimise ses bénéfices, compte tenu des prix;
3. Les contraintes budgétaires du système de sécurité sociale et du gouvernement sont valides;
4. Les conditions de compensation du marché s'appliquent pour la main-d'œuvre, le capital et les obligations gouvernementales;
5. Le marché des biens compense.

## Annexe

## Glossaire

Tableau 1 *Paramètres qui peuvent être étalonnés*

Paramètre	Description
$H$	Temps total disponible à consacrer pour les ménages
$\alpha$	Part du capital de la production
$\delta$	Taux d'amortissement du capital

Tableau 2 *Variables exogènes tirées des données et des projections*

Variable exogène	Description
$C_{0,t}$	Dépenses de consommation des enfants ( $j = 0$ )
$n_t$	Taux de croissance de la population et taux de fécondité
$A_t$	Productivité totale des facteurs (PTF)
$FC_{j,t}$	Unités de temps par période consacrées à la fécondité
$FE_{j,t}$	Unités de temps par période consacrées à l'éducation
$G_t$	Dépenses gouvernementales
$\varepsilon_{j,t}$	Efficiences de la main-d'œuvre spécifique à l'âge et au temps
$l_t^p$	Fraction maximale d'une période qu'un ménage à l'âge des dernières années de travail peut travailler
$\tau_t^c$	Taxe proportionnelle à la consommation
$\tau_t^h$	Impôt proportionnel sur le revenu de la main-d'œuvre
$\tau_t^p$	Impôt proportionnel sur le revenu de retraite
$\varphi_{j,t}$	Probabilité de survie de l'âge $j$ à l'âge $j + 1$

Tableau 3 *Variables endogènes générées par le modèle*

Variables endogènes	Description
$a_{j,t}$	Actifs sans risque détenus au début de la période $t$
$a_{j,t}^r$	Actifs risqués détenus au début de la période $t$
$c_{j,t}$	Consommation de la cohorte $j$ à la période $t$
$h_{j,t}$	Offre de main-d'œuvre de la cohorte $j$ à la période $t$
$p_t^p$	Rente publique versée à un ménage à l'âge des dernières années de travail à la période $t$
$r_t$	Rendement net des actifs sans risque
$r_t^r$	Rendement du capital, après amortissement
$w_t$	Taux salarial par unité de main-d'œuvre efficace
$B_{t+1}$	Obligations gouvernementales émises à la période $t$
$C_t$	Consommation globale
$H_t$	Volume global de main-d'œuvre efficace
$K_t$	Stock de capital global au début de la période $t$
$N_{j,t}$	Taille de la population de la cohorte $j$
$Y_t$	Total des biens en forme finale produits à la période $t$
$\mu_{j,t}$	Part de la population de la cohorte $j$
$\xi_t$	Actifs résiduels de la fraction de la population décédée
$\tau_t^s$	Taux de cotisation pour équilibrer la sécurité sociale