



Canadian
Institute
of Actuaries

Institut
canadien
des actuaires

Supplément de note éducative

Étalonnage des modèles stochastiques de taux d'intérêt sans risque aux fins de l'évaluation selon la MCAB

Document 217053

La plus récente version : document 221066

Ce document a été archivé le 11 avril 2023

Supplément de note éducative

Étalonnage des modèles stochastiques de taux d'intérêt sans risque aux fins de l'évaluation selon la MCAB

Commission des rapports financiers des
compagnies d'assurance-vie

ARCHIVÉ

Mai 2017

Document 217053

This document is also available in English
© 2017 Institut canadien des actuaires

Les membres devraient connaître les suppléments aux notes éducatives. Les suppléments aux notes éducatives expliquent ou mettent à jour les conseils fournis dans une note éducative. Elles ne constituent pas des normes de pratique et sont donc de caractère non exécutoire. Toutefois, de concert avec la note éducative source, elles ont pour but d'illustrer l'application (qui n'est toutefois pas exclusive) des normes de pratique, de sorte qu'il ne devrait y avoir aucun conflit entre elles. Elles visent à aider les actuaires en ce qui concerne l'application de normes de pratique dans des circonstances spécifiques. Le mode d'application de normes de pratique dans un contexte particulier demeure la responsabilité des membres.

NOTE DE SERVICE

À : Tous les praticiens en assurance-vie

De : Pierre Dionne, président
Direction de la pratique actuarielle

Stéphanie Fadous, présidente
Commission des rapports financiers des compagnies d'assurance-vie

Date : Le 17 mai 2017

Objet : **Supplément de note éducative – Étalonnage des modèles stochastiques de taux d'intérêt sans risque aux fins de l'évaluation selon la MCAB**

La Commission des rapports financiers des compagnies d'assurance-vie (CRFCAV), par l'entremise du Groupe de travail sur l'étalonnage, a revu la mise à jour des critères d'étalonnage des modèles stochastiques de taux d'intérêt sans risque depuis la dernière publication afin de tenir compte de l'expérience jusqu'au milieu de 2016.

Les résultats des travaux et les recommandations du groupe de travail précédent ont été publiés dans un [document de recherche](#) en décembre 2013.

Ces critères d'étalonnage sont directement applicables aux taux d'intérêt sans risque canadiens ou aux instruments libellés en dollars canadiens, mais ils pourraient être adaptés pour les États-Unis et d'autres pays industrialisés.

Les critères d'étalonnage reposent sur les données historiques des taux d'intérêt depuis les années 1930, dont la portée est jugée suffisamment grande pour couvrir une vaste gamme d'éventuelles réalisations de taux d'intérêt sans risque. Le présent supplément de note éducative met à jour les critères d'étalonnage des taux d'intérêt sans risque stochastiques qui s'appuyaient sur l'expérience historique des taux d'intérêt sans risque à long terme jusqu'en 2012, lesquels ont été mis à jour pour tenir compte de l'expérience jusqu'en juin 2016. La distribution mise à jour des taux utilisée comme base pour les critères d'étalonnage de l'état stationnaire a démontré une diminution entre l'expérience historique et les critères d'étalonnage aux 2,5^e, 5^e et 10^e percentiles. Il a donc été décidé qu'il y avait lieu de réviser les critères d'étalonnage.

Comme pour tout ce que promulgue le Conseil des normes actuarielles (CNA), la CRFCAV a l'intention de revoir de temps à autre l'expérience mise à jour, ce qui pourrait nous amener à réviser les critères d'étalonnage dans l'avenir.

Le présent supplément de note éducative porte sur la mise au point des critères pour étalonner les modèles stochastiques de taux d'intérêt sans risque utilisés dans la production de scénarios de taux d'intérêt sans risque aux fins de l'évaluation du passif des contrats d'assurance selon la méthode canadienne axée sur le bilan (MCAB). Il faudra peut-être pour cela générer un grand nombre de scénarios. Aux fins de l'évaluation, on peut avoir recours à un sous-ensemble de scénarios ou à un nombre moindre de scénarios conçus pour représenter l'ensemble des scénarios stochastiques. Les méthodes servant à réduire le nombre de scénarios ne s'inscrivent pas dans la portée du présent document. L'actuaire peut consulter les conseils de l'ICA à propos de l'utilisation d'approximations et la documentation disponible¹ traitant des techniques de réduction du nombre de scénarios.

Enfin, la CRFCAV tient à souligner la contribution du groupe de travail et à en remercier les membres, Jonathan Boivin, John Campbell, Brock McEwen, Jean-Yves Rioux et Salina Young pour leurs efforts. Les membres du groupe de travail ont contribué aux travaux en fonction de leurs propres compétences et expérience. Les idées exprimées dans ce supplément de note éducative sont le fruit d'un consensus général parmi les membres du groupe de travail. Rien dans le présent document ne doit être interprété comme représentant l'opinion de l'un ou l'autre des employeurs des membres du groupe, ou comme une opinion ou une position à l'égard de la politique des organismes de réglementation.

Conformément à la Politique sur le processus interne d'approbation de matériel d'orientation autre que les normes de pratique et les documents de recherche, le présent supplément de note éducative a été préparé par la CRFCAV et approuvé pour diffusion par la Direction de la pratique actuarielle le 16 mai 2017.

Pour toute question ou commentaire à propos du présent supplément de note éducative, veuillez communiquer avec Stéphanie Fadous à stephanie_fadous@manulife.com.

PD, SF

¹ Par exemple, le document de l'American Academy of Actuaries intitulé « [Modeling Efficiency Bibliography for Practicing Actuaries](#) », publié en décembre 2011, renferme un certain nombre de références relativement aux techniques de réduction du nombre de scénarios comme le document de Chueh, Yvonne « [Efficient Stochastic Modeling for Large and Consolidated Insurance Business: Interest Rate Sampling Algorithms](#) » publié dans le *North American Actuarial Journal* en juillet 2002.

Table des matières

1. Objet/Résumé.....	5
2. Objectifs et principes.....	7
3. Taux d'intérêt historiques.....	8
4. Critères d'étalonnage des modèles de taux d'intérêt à long terme.....	10
4.1 Critères d'étalonnage sur 60 ans des taux à long terme.....	11
4.1.1 Comparaison avec les valeurs historiques.....	12
4.1.2 Comparaison avec les résultats modélisés.....	13
4.2 Critères d'étalonnage sur deux ans et sur 10 ans du taux à long terme.....	14
4.3 Critères d'étalonnage du retour à la moyenne du taux à long terme.....	15
5. Critères d'étalonnage du taux à court terme.....	16
5.1 Critères d'étalonnage sur 60 ans du taux à court terme.....	17
5.1.1 Comparaison avec les résultats historiques.....	17
5.2 Critères d'étalonnage sur deux ans du taux à court terme.....	18
6. Critères d'étalonnage de la pente sur 60 ans.....	20
6.1 Comparaison avec les résultats historiques.....	20
7. Conseils sur les taux à moyen terme.....	21
8. Production de scénarios.....	22
9. Critères d'étalonnage pour d'autres pays.....	23
Annexe A.....	25
Annexe B.....	27
Annexe C.....	33
Annexe D.....	37
Annexe E.....	39

ARCHIVÉ

1. Objet/Résumé

Le présent supplément de note éducative a pour objet de mettre au point des critères pour étalonner les modèles stochastiques de taux d'intérêt sans risque utilisés dans la production de scénarios de taux d'intérêt sans risque aux fins de l'évaluation du passif des contrats d'assurance selon la MCAB. On y trouve des conseils mis à jour pour les taux d'intérêt sans risque à long terme (échéance résiduelle d'au moins 20 ans) et pour les taux d'intérêt sans risque à court terme (échéance d'un an), les taux d'intérêt sans risque à moyen terme (échéance de cinq à 10 ans) et la pente² de la courbe de rendement.

Dans les normes de pratique, il y a des recommandations concernant le choix des scénarios stochastiques de taux d'intérêt sans risque. Les divers modèles stochastiques de taux d'intérêt sans risque et l'établissement des paramètres des modèles peuvent produire des ensembles de scénarios considérablement différents. Nonobstant toute définition d'une fourchette plausible de taux d'intérêt canadiens sans risque, les normes de pratique donnent peu de conseils quant au choix, à l'ajustement et à l'utilisation d'un modèle stochastique de taux d'intérêt sans risque. Un des objectifs de la CRFCAV est de réduire l'étendue de la pratique et ces conseils supplémentaires appuient cet objectif.

Les critères d'étalonnage présentés dans ce supplément de note éducative sont conçus pour servir à valider les ensembles de scénarios de monde réel qui projettent l'évolution des taux sans risque sur des horizons à long terme aux fins de l'évaluation du passif des contrats d'assurance. Inversement, les critères d'étalonnage présentés dans ce supplément de note éducative ne conviendraient pas pour valider un ensemble de scénarios de taux d'intérêt visant à prendre en compte la dynamique courante du marché.

Il serait considéré comme une pratique exemplaire de modéliser de façon cohérente à la fois les actifs à revenu fixe des comptes généraux et des comptes de fonds distincts si on a recours à des scénarios de monde réel de taux d'intérêt sans risque.

L'approche normale pour bâtir un modèle stochastique de taux d'intérêt sans risque et générer des ensembles de scénarios de taux d'intérêt serait de choisir une forme de modèle puis d'estimer un ensemble initial de paramètres pour le modèle en utilisant des techniques statistiques. La série de scénarios découlant du modèle serait ensuite examinée pour déterminer si les critères d'étalonnage ont été respectés. S'il y a lieu, les paramètres seraient ajustés afin de générer un nouvel ensemble de scénarios conformes aux critères d'étalonnage.

Il peut ne pas être nécessaire de respecter rigoureusement les critères d'étalonnage pour utiliser les scénarios stochastiques de taux d'intérêt sans risque, en particulier quand certains des taux à court terme, des taux à long terme ou certaines pentes n'ont pas un effet important sur l'évaluation. Il peut aussi s'avérer possible de satisfaire aux

² Correspond au taux sans risque à long terme moins le taux sans risque à court terme.

critères d'étalonnage de l'extrémité gauche, mais non à ceux de l'extrémité droite si on peut démontrer que le résultat qui en découle est plus conservateur. Dans de telles situations, se référer aux conseils de l'ICA à propos de l'importance relative et du recours à des approximations.

Enfin, de nombreux modèles de taux d'intérêt sans risque sont disponibles, allant des modèles à volatilité fixe aux modèles à volatilité stochastique et allant des modèles à régime unique aux modèles à régimes multiples. Il est impossible de dresser la liste de tous les modèles. Cependant, des commentaires généraux figurent à l'annexe A.

Pour faciliter la tâche, les critères d'étalonnage des taux sans risque à long terme et à court terme et les pentes sont résumés ci-dessous. L'annexe C présente une comparaison avec les critères actuels. En ce qui concerne les taux sans risque à moyen terme, des conseils qualitatifs sont donnés à la section 7. Les critères d'étalonnage sont exprimés en rendements obligataires équivalents.

**Critères d'étalonnage des taux d'intérêt sans risque à long terme
(échéance de ≥ 20 ans)**

Horizon		Deux ans			10 ans			60 ans
Taux initial		4,00 %	6,25 %	9,00 %	4,00 %	6,25 %	9,00 %	6,25 %
Percentile, extrémité gauche	2,5 ^e	2,70 %	4,25 %	6,40 %	2,25 %	2,85 %	3,95 %	2,30 %
	5,0 ^e	3,00 %	4,55 %	6,90 %	2,45 %	3,15 %	4,50 %	2,60 %
	10,0 ^e	3,20 %	4,90 %	7,20 %	2,80 %	3,70 %	5,15 %	2,90 %
Percentile, extrémité droite	90,0 ^e	5,20 %	7,60 %	10,00 %	6,90 %	9,10 %	11,50 %	10,00 %
	95,0 ^e	5,55 %	8,10 %	11,00 %	7,90 %	10,10 %	12,60 %	11,90 %
	97,5 ^e	5,90 %	8,50 %	11,50 %	8,70 %	10,95 %	13,60 %	13,30 %

Une fourchette de valeurs se situant autour de la valeur médiane historique peut être produite et serait acceptable, même si on s'attendrait généralement à une valeur médiane à l'horizon de 10 ans entre 4,00 % et 6,75 %. Il conviendrait de justifier une valeur médiane à l'extérieur de cette fourchette.

Pour tous les modèles stochastiques de taux d'intérêt sans risque à long terme, la période de retour à la moyenne ne serait pas inférieure à 14,5 ans (équivalente à une demi-vie de 10 ans).

Critères d'étalonnage des taux sans risque à court terme (échéance d'un an)

Horizon		Deux ans			60 ans
Taux initial		2,00 %	4,50 %	8,00 %	4,50 %
Percentile, extrémité gauche	2,5 ^e	0,45 %	1,25 %	2,85 %	0,60 %
	5,0 ^e	0,65 %	1,55 %	3,55 %	0,80 %
	10,0 ^e	0,90 %	2,00 %	4,40 %	0,85 %
Percentile, extrémité droite	90,0 ^e	4,25 %	7,50 %	11,00 %	10,00 %
	95,0 ^e	5,10 %	8,35 %	12,05 %	12,00 %
	97,5 ^e	5,95 %	9,15 %	12,95 %	13,65 %

Critères d'étalonnage de la pente (le taux à long terme moins le taux à court terme)

Horizon		60 ans
Percentile, extrémité gauche	5 ^e	-2,00 %
	10 ^e	-0,50 %
Percentile, extrémité droite	90 ^e	2,50 %
	95 ^e	3,00 %

De plus amples détails seront fournis dans le reste du présent supplément de note éducative.

2. Objectifs et principes

Afin de produire des critères d'étalonnage raisonnables, les principes suivants ont été adoptés. Les critères d'étalonnage

- seraient suffisamment rigoureux pour restreindre l'étendue de la pratique, tout en permettant à l'actuaire d'appliquer un jugement raisonnable dans des circonstances particulières;
- seraient appliqués aux ensembles de scénarios de taux d'intérêt sans risque produits;
- seraient appliqués non seulement aux parties à l'état stationnaire des scénarios de taux d'intérêt sans risque produits, mais également au court terme;
- favoriseraient l'élaboration d'ensembles de scénarios de taux d'intérêt sans risque qui prennent en compte à la fois les chocs à la courbe de rendement et les baisses ou les augmentations de taux d'intérêt sur de longues périodes de temps, en accord avec les observations historiques;
- intégreraient une vaste distribution de scénarios de taux d'intérêt sans risque ainsi que des environnements qui persistent sur des périodes prolongées.

Un agencement de critères d'étalonnage quantitatifs et de conseils d'ordre qualitatif a été élaboré. Des critères quantitatifs sont fournis pour les taux sans risque à court terme et à long terme. Un ensemble de critères d'étalonnage reposant exclusivement sur une analyse quantitative peut dépendre de manière exagérée des données historiques, peut

être influencé de manière subjective par le choix de la période historique et ne tient pas compte des différences économiques et monétaires entre la période historique sélectionnée et la période actuelle. Les conseils qualitatifs, comme ceux présentés pour les taux sans risque à moyen terme dans ce supplément de note éducative, viennent compléter les exigences quantitatives et incitent l'actuaire à utiliser son jugement pour évaluer la pertinence des résultats des modèles stochastiques de taux d'intérêt sans risque.

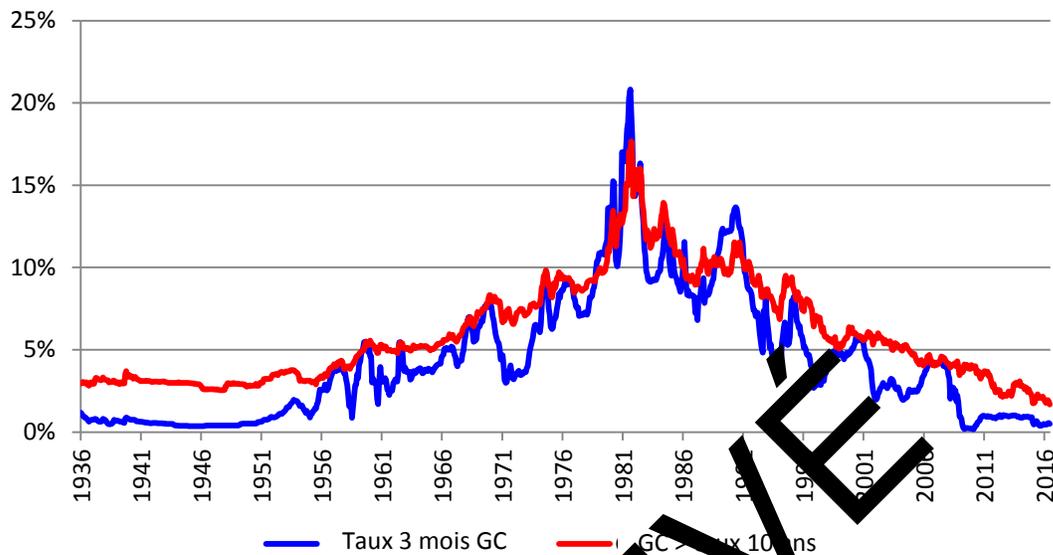
On s'est demandé s'il fallait examiner les taux réels (et l'inflation) ou les taux nominaux. Les taux nominaux ont été sélectionnés étant donné qu'il n'était pas pratique de modéliser la relation complexe entre les taux réels et l'inflation et que la disponibilité des taux nominaux historiques était meilleure. L'actuaire consulterait les normes de pratique s'il a besoin de conseils afin de formuler des hypothèses concernant l'inflation qui sont conformes aux taux nominaux générés par le modèle stochastique étalonné de taux d'intérêt sans risque.

3. Taux d'intérêt historiques

Les taux d'intérêt sans risque historiques canadiens, depuis les années 1930, sont présentés dans le graphique ci-dessous. Trois schémas distincts peuvent être observés avec, en premier lieu, une période de faibles taux d'intérêt qui prévalaient à partir de la dépression des années 1930 jusqu'à la Seconde Guerre mondiale, suivie d'une période de hausse continue des taux d'intérêt jusqu'aux années 1970 et 1980 et enfin une période de taux en baisse continue jusqu'à juin 2016. Il a été décidé de tenir compte de l'expérience historique pour refléter ces trois périodes, car on souhaitait inclure des données portant sur une période suffisamment longue pour prendre en compte les changements au plan notamment du système monétaire et de la politique fiscale pouvant avoir exercé une influence sur le niveau et la volatilité des taux d'intérêt.

Taux historiques des obligations du gouvernement du Canada à court terme et à long terme

CAD – Janvier 1936 à juin 2016



Source : Banque du Canada, séries V122541³ et V122487³

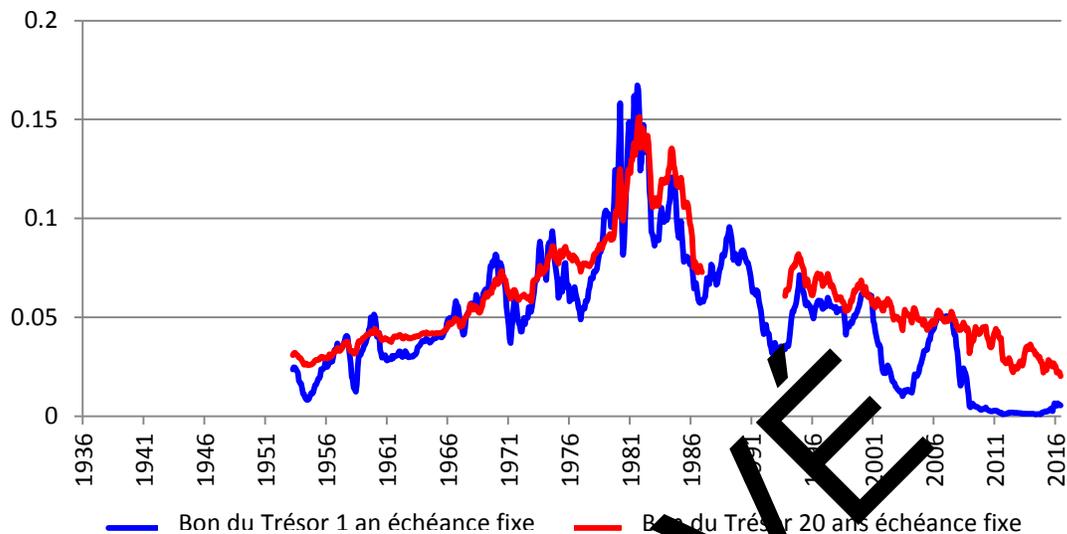
Même si la série CANSIM V122487 contient des rendements de 1919 à aujourd'hui, nous avons choisi de n'utiliser que les taux depuis la fondation de la Banque du Canada en 1935. Les rendements indiqués dans la série pour la période avant 1936 sont calculés selon une base différente de celle utilisée pour les rendements à compter du 1^{er} janvier 1936. Nous avons choisi d'utiliser comme point de départ la date du 1^{er} janvier 1936 plutôt que d'essayer d'ajuster les données historiques antérieures selon une base conforme à celle des données postérieures à 1936.

Le graphique suivant illustre les taux d'intérêt historiques aux États-Unis; les schémas sont semblables à ceux du Canada. Ces données sont présentées à titre d'information seulement et n'ont pas été prises en compte dans l'élaboration des critères d'étalonnage des taux d'intérêt canadiens.

³ La série V122541 correspond aux bons du Trésor du gouvernement du Canada – rendement moyen – trois mois. La série V122487 correspond aux obligations négociables du gouvernement du Canada – rendement moyen – plus de 10 ans.

Taux historiques des bons du Trésor à échéance constante de 20 ans et taux des bons du Trésor à échéance constante d'un an des États-Unis

USD – Avril 1953 à juin 2016



Source : Federal Reserve Bank de St. Louis

Les critères d'étalonnage ont été conçus pour faciliter la mise au point d'un modèle stochastique de taux d'intérêt sans risque, produisant des scénarios ayant les caractéristiques suivantes :

- produire une grande variété de scénarios de taux d'intérêt, en accord avec les fourchettes historiques;
- produire des périodes continues de taux d'intérêt faibles;
- produire des périodes continues de taux d'intérêt élevés (mais avec faible probabilité de taux extrêmement élevés);
- produire des périodes de taux à tendance à la baisse et de taux à tendance à la hausse;
- produire des périodes de courbe de rendement inversée;
- produire une pente raisonnable entre les taux à long terme et à court terme;
- passer entre des taux faibles et des taux élevés dans une période de temps raisonnable.

Ces caractéristiques peuvent aussi être observées au cours des 70 dernières années dans les graphiques ci-haut.

4. Critères d'étalonnage des modèles de taux d'intérêt à long terme

Cette section donne un aperçu de l'ensemble complet des critères d'étalonnage des taux d'intérêt sans risque à long terme qui sont présumés correspondre à une échéance de 20 ans ou plus.

Des critères d'étalonnage ont été élaborés pour les horizons de deux ans, 10 ans et 60 ans. Les scénarios de taux d'intérêt aux horizons de deux ans et de 10 ans seront influencés par le taux d'intérêt initial et donc, des critères d'étalonnage pour un taux d'intérêt initial à long terme de 4 %, 6,25 % et 9 % sont fournis. À l'horizon de 60 ans, on s'attend à ce que l'incidence du taux initial soit minimale; ainsi, seuls des critères d'étalonnage pour un taux initial de 6,25 % sont fournis. Les critères d'étalonnage visent surtout les extrémités de la distribution (c.-à-d., $\leq 10^{\text{e}}$ percentile et $\geq 90^{\text{e}}$ percentile).

L'utilisation de taux initiaux fixes aux fins de l'étalonnage permet d'aborder la question pratique à savoir que, dans la plupart des cas, les paramètres des modèles stochastiques de taux d'intérêt sans risque seront établis, les modèles seront testés et les scénarios seront générés avant la date d'évaluation et il est attendu que les taux d'intérêt fluctuent pendant cette période.

L'étalonnage des taux à long terme est assujéti à trois exigences: 1) satisfaire aux critères d'étalonnage sur 60 ans; 2) satisfaire aux critères d'étalonnage à court terme (entre deux et 10 ans); et 3) satisfaire à une contrainte de rendement à la moyenne.

Les critères d'étalonnage sur 60 ans ont d'abord été établis en fonction de l'expérience historique. Les critères d'étalonnage sur un horizon à plus court terme ont ensuite été établis en fonction des résultats générés par des modèles où les paramètres avaient été établis pour respecter les critères d'étalonnage sur 60 ans.

L'élaboration des critères d'étalonnage est expliquée plus en détail dans les sections suivantes.

4.1 Critères d'étalonnage sur 60 ans des taux à long terme

L'état stationnaire est défini comme le moment au-delà duquel la distribution des taux d'intérêt générés par les modèles ne change que de manière négligeable ou au-delà duquel l'influence du taux d'intérêt initial est minimale. Idéalement, les critères d'étalonnage seraient établis au point de l'état stationnaire. Cependant, étant donné que ce moment peut se produire dans un avenir très lointain et qu'il peut varier selon le type du modèle et les paramètres établis, on suppose, aux fins de l'étalonnage, qu'un horizon de projection de 60 ans est suffisant pour dire que l'état stationnaire a été atteint. Les critères des taux à long terme sur un horizon de 60 ans sont présentés ci-dessous.

Critères d'étalonnage sur 60 ans

Taux initial	6,25 %	
Percentile, extrémité gauche	2,5 ^e	2,30 %
	5,0 ^e	2,60 %
	10,0 ^e	2,90 %
Percentile, extrémité droite	90,0 ^e	10,00 %
	95,0 ^e	11,90 %
	97,5 ^e	13,30 %

Ces critères seront respectés si le modèle stochastique de taux d'intérêt sans risque produit des résultats qui sont inférieurs ou égaux à chacun des critères d'étalonnage de l'extrémité gauche et supérieurs ou égaux à chacun des critères d'étalonnage de l'extrémité droite, avec un taux initial à long terme de 6,25 %. Les critères d'étalonnage sont exprimés en rendements obligataires équivalents.

Des critères d'étalonnage sont fournis pour l'extrémité gauche et l'extrémité droite de la distribution des scénarios. De 1936 à juin 2016, le rendement moyen et médian des obligations canadiennes à long terme sans risque se situait à 6,00 % et 5,21 %, respectivement⁴. Les 35^e et 65^e percentiles se situent à 3,94 % et 6,78 %, respectivement. Une fourchette de valeurs se situant autour de la médiane historique peut être produite et serait acceptable, cependant on s'attendrait généralement à une valeur médiane se situant entre 4,00 % et 6,75 %⁵. Il conviendrait de justifier une valeur médiane à l'extérieur de cette fourchette.

4.1.1 Comparaison avec les résultats historiques

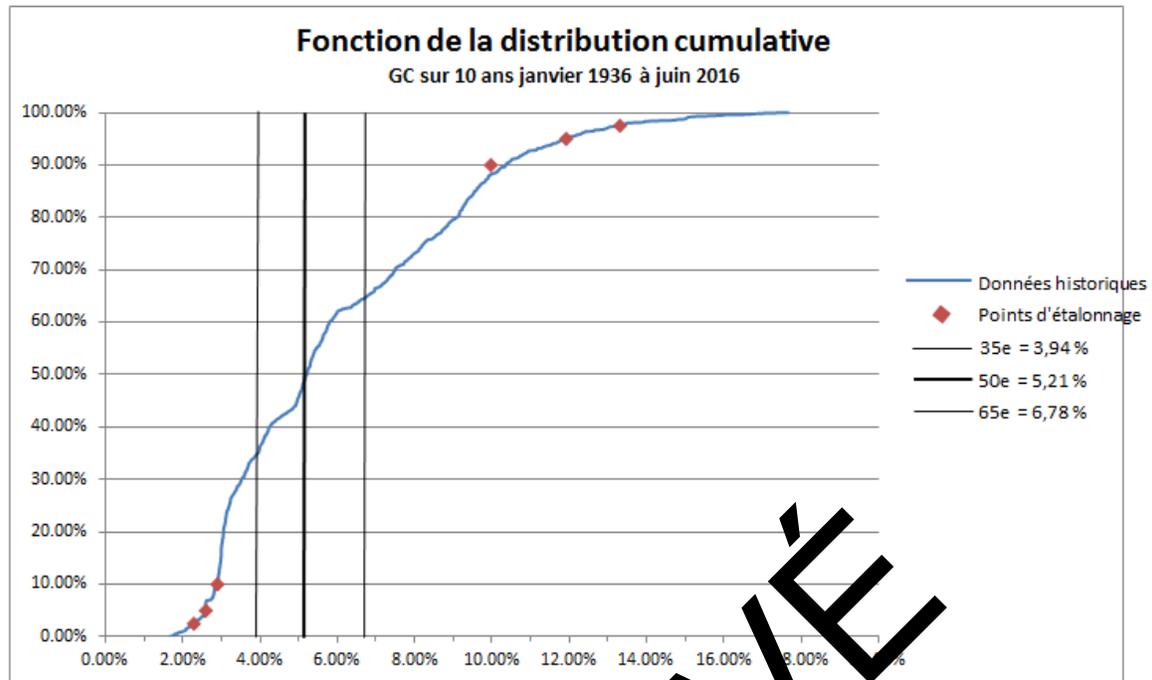
Comme on peut le constater dans le tableau et le graphique ci-dessous, les critères d'étalonnage sont en accord avec les résultats historiques jusqu'en juin 2016 à la plupart des points d'étalonnage.

		Critères d'étalonnage	1936– 2016	Écart
Percentile, extrémité gauche	2,5 ^e	2,30 %	2,27 %	0,03 %
	5,0 ^e	2,60 %	2,59 %	0,01 %
	10,0 ^e	2,90 %	2,90 %	0,00 %
Percentile, extrémité droite	9,0 ^e	10,00 %	10,36 %	(0,36) %
	95,0 ^e	11,90 %	11,89 %	0,01 %
	97,5 ^e	13,30 %	13,30 %	0,00 %

Le graphique qui suit illustre également que les critères d'étalonnage correspondent étroitement à l'expérience historique jusqu'en juin 2016.

⁴ Comparativement à 6,16 % et 5,30 % dans le document de recherche de 2013, d'après les données jusqu'en 2012.

⁵ Dans la note éducative de 2009, une fourchette de 5,00 % à 6,75 % correspondait aux 40^e et 60^e percentiles de l'expérience historique. La fourchette de percentiles a été élargie en raison de l'écart important entre le 60^e et le 65^e percentile.



Source : Banque du Canada, série V122487

4.1.2 Comparaison avec les résultats des modèles

Les critères d'étalonnage sur 60 ans ont été mis à l'essai à l'aide de deux types de modèles couramment utilisés et publiquement disponibles, avec au moins deux ensembles différents de paramètres pour chacun. La mise à l'essai des modèles stochastiques de taux d'intérêt sans risque visait à déterminer si les types de modèles courants pouvaient, avec l'établissement de paramètres raisonnables, produire des scénarios respectant les critères d'étalonnage.

À cette fin, on a mis à l'essai divers types de modèles stochastiques de taux d'intérêt sans risque, utilisant trois ensembles de paramètres différents pour le modèle Cox-Ingersoll-Ross (CIR) et deux pour le modèle Brennan-Schwartz (BS). Les résultats de la mise à l'essai sont présentés dans le tableau qui suit. Les détails sur l'établissement des modèles CIR et BS figurent à l'annexe B.

Critères d'étalonnage sur 60 ans – Résultats de la mise à l'essai des modèles

Percentile	Critères	CIR Ensemble de paramètres 1	CIR Ensemble de paramètres 2	CIR Ensemble de paramètres 3	BS Ensemble de paramètres 1	BS Ensemble de paramètres 2
2,5 ^e	2,30 %	1,84 %	1,83 %	1,83 %	2,23 %	2,22 %
5,0 ^e	2,60 %	2,28 %	2,27 %	2,26 %	2,51 %	2,51 %
10,0 ^e	2,90 %	2,86 %	2,85 %	2,85 %	2,89 %	2,89 %
Médiane		5,82 %	5,81 %	5,82 %	5,15 %	5,14 %
90,0 ^e	10,00 %	10,31 %	10,34 %	10,35 %	10,39 %	10,39 %
95,0 ^e	11,90 %	11,90 %	11,93 %	11,93 %	13,03 %	13,04 %
97,5 ^e	13,30 %	13,43 %	13,48 %	13,50 %	16,16 %	16,25 %

4.2 Critères d'étalonnage sur deux ans et sur 10 ans des taux à long terme

Pour des critères d'étalonnage à des horizons à plus court terme, le taux initial est important. Voilà pourquoi des critères d'étalonnage appropriés pour des contextes initiaux de taux d'intérêt faibles, moyens et élevés ont été établis. L'histoire a démontré que les taux d'intérêt peuvent fluctuer considérablement sur de courtes périodes de temps et il est souhaitable de tenir compte de la dynamique des contextes initiaux de taux d'intérêt plus faibles et plus élevés. Des taux initiaux à long terme de 4,00 % et de 9,00 % ont été choisis comme taux faible et élevé types aux fins de l'élaboration des critères d'étalonnage. Ceci n'empêche pas l'utilisation du modèle étalonné avec des taux initiaux à long terme inférieurs à 4,00 % ou supérieurs à 9,00 %. Les critères d'étalonnage du taux à long terme sur un horizon à plus court terme sont présentés ci-dessous.

Critères d'étalonnage sur deux ans et sur 10 ans

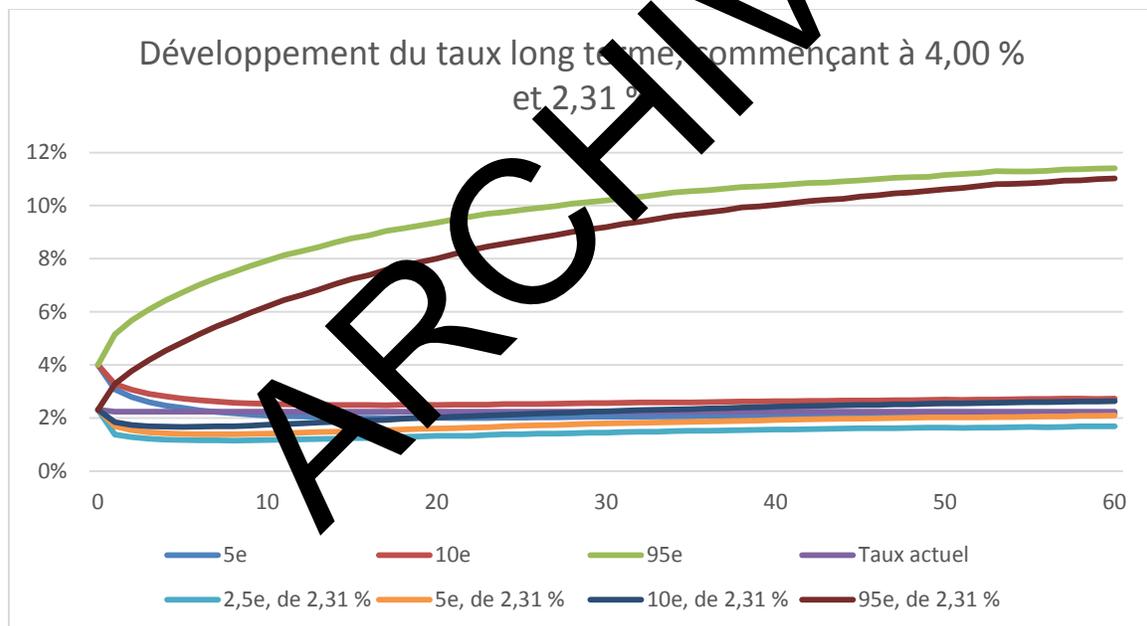
Horizon		Deux ans			10 ans		
Taux initial		4,00 %	6,25 %	9,00 %	4,00 %	6,25 %	9,00 %
Percentile, extrémité gauche	2,5 ^e	2,70 %	4,25 %	6,40 %	2,25 %	2,85 %	3,95 %
	5 ^e	3,00 %	4,55 %	6,80 %	2,45 %	3,15 %	4,50 %
	10 ^e	3,20 %	4,90 %	7,20 %	2,80 %	3,70 %	5,15 %
Percentile, extrémité droite	90 ^e	5,20 %	7,65 %	10,50 %	6,90 %	9,10 %	11,50 %
	95 ^e	5,55 %	8,10 %	11,00 %	7,90 %	10,10 %	12,60 %
	97,5 ^e	5,90 %	8,50 %	11,50 %	8,70 %	10,95 %	13,60 %

Ces critères d'étalonnage seront respectés si le modèle stochastique de taux d'intérêt sans risque génère des résultats qui sont inférieurs ou égaux à chacun des critères

d'étalonnage de l'extrémité gauche et supérieurs ou égaux à chacun des critères d'étalonnage de l'extrémité droite, pour chacun des trois taux initiaux à long terme. Les critères d'étalonnage sont exprimés en rendements obligataires équivalents.

Pour déterminer ces critères d'étalonnage, les résultats historiques ont d'abord été étudiés. Toutefois, puisque les données disponibles pour analyser la progression des taux pour chacun des taux initiaux sont limitées, les résultats des formes de modèles CIR et BS qui ont servi à tester les critères d'étalonnage sur un horizon de 60 ans ont été utilisés pour définir les critères d'étalonnage d'horizon de plus courte durée. Les critères d'étalonnage sur deux ans et sur 10 ans ont été établis en choisissant la valeur la moins contraignante à chaque point d'étalonnage parmi les résultats des cinq modèles stochastiques de taux d'intérêt sans risque dont il est question à l'annexe B. Les modèles respectant ces critères produiront une dispersion raisonnable des taux d'intérêt aux horizons de deux ans et de 10 ans.

Si le taux initial à long terme réel est inférieur à 4,00 % ou supérieur à 9,00 %, les modèles produiront alors des distributions de scénarios qui sont recalées par rapport aux critères d'étalonnage figurant dans le tableau ci-haut, tel qu'illustré dans le graphique suivant quand le taux initial est inférieur à 4,00 %.



L'annexe C présente une comparaison des critères d'étalonnage des taux sans risque à long terme et des critères d'étalonnage précédents mis au point pour le document de recherche de 2013.

4.3 Critères d'étalonnage du retour à la moyenne des taux à long terme

L'expérience historique montre que les taux d'intérêt peuvent demeurer faibles durant de longues périodes de temps. Les critères d'étalonnage élaborés jusqu'ici ne contraignent pas suffisamment les modèles stochastiques de taux d'intérêt sans risque

pour tenir compte des contextes économiques dans lesquels les taux d'intérêt demeurent faibles pendant plusieurs années.

Voilà pourquoi il a fallu ajouter une contrainte additionnelle pour tous les modèles stochastiques de taux d'intérêt sans risque de façon à ce que la période du retour à la moyenne ne soit pas inférieure à (c.-à-d., ne soit pas de plus courte durée ou plus rapide que) 14,5 années (équivalent à une demi-vie de 10 ans).

Pour des modèles stochastiques de taux d'intérêt sans risque simples comportant un facteur explicite de retour à la moyenne, il est possible de satisfaire à cette exigence en tenant compte directement de la valeur du paramètre de retour à la moyenne. Pour des modèles plus complexes, on peut avoir recours à une preuve mathématique ou à la procédure présentée à l'annexe D.

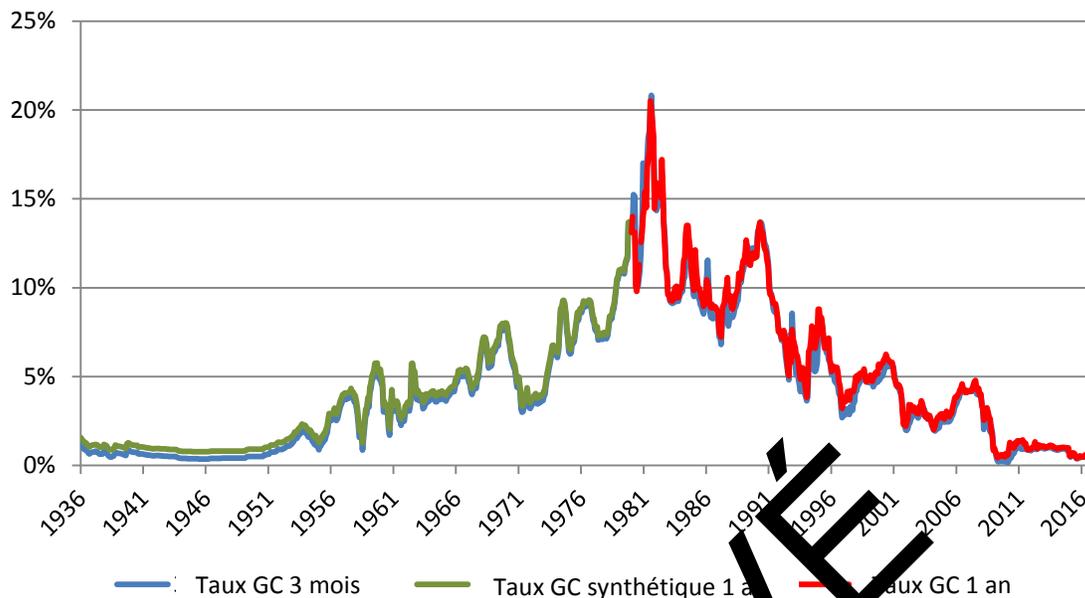
5. Critères d'étalonnage des taux à court terme

Cette section présente les critères d'étalonnage du taux sans risque à court terme, qui est présumé correspondre à une échéance d'un an.

L'approche utilisée pour déterminer les critères d'étalonnage du taux à court terme était conforme à celle utilisée pour le taux à long terme, c'est-à-dire que les critères d'étalonnage sur 60 ans ont été établis en premier lieu en fonction de l'expérience historique. Puis, les critères d'étalonnage sur un horizon plus rapproché ont été fondés sur les résultats générés par les modèles dont les paramètres respectent les critères d'étalonnage sur 60 ans. Lorsqu'il y a chevauchement dans la méthode décrite pour les taux à long terme, ce n'est pas répété ici.

L'expérience historique pour le taux sur un an n'est disponible qu'à compter de 1980 et celle pour le taux sur trois mois est disponible à partir des années 1930. L'expérience est hautement corrélée entre les deux séries de taux, comme on peut le constater dans le graphique ci-dessous. Afin d'avoir une période historique pour le taux à court terme qui est conforme à celle du taux à long terme, une série synthétique de taux sur un an a été dérivée en fonction de l'échancé sur trois mois pour la période complète et du lien entre les taux sur trois mois et les taux sur un an entre 1980 et 2016. La méthode est expliquée en détail à l'annexe E.

CAD – Janvier 1936 à juin 2016



5.1 Critères d'étalonnage sur 60 ans du taux à court terme

Les critères d'étalonnage sur un horizon de 60 ans du taux à court terme sont indiqués ci-dessous.

Critère d'étalonnage sur 60 ans

Percents		Taux initial	
			4,50 %
Extrémité gauche	2,5 ^e	0,60 %	
	5 ^e	0,80 %	
	10 ^e	0,85 %	
Extrémité droite	90 ^e	10,00 %	
	95 ^e	12,00 %	
	97,5 ^e	13,65 %	

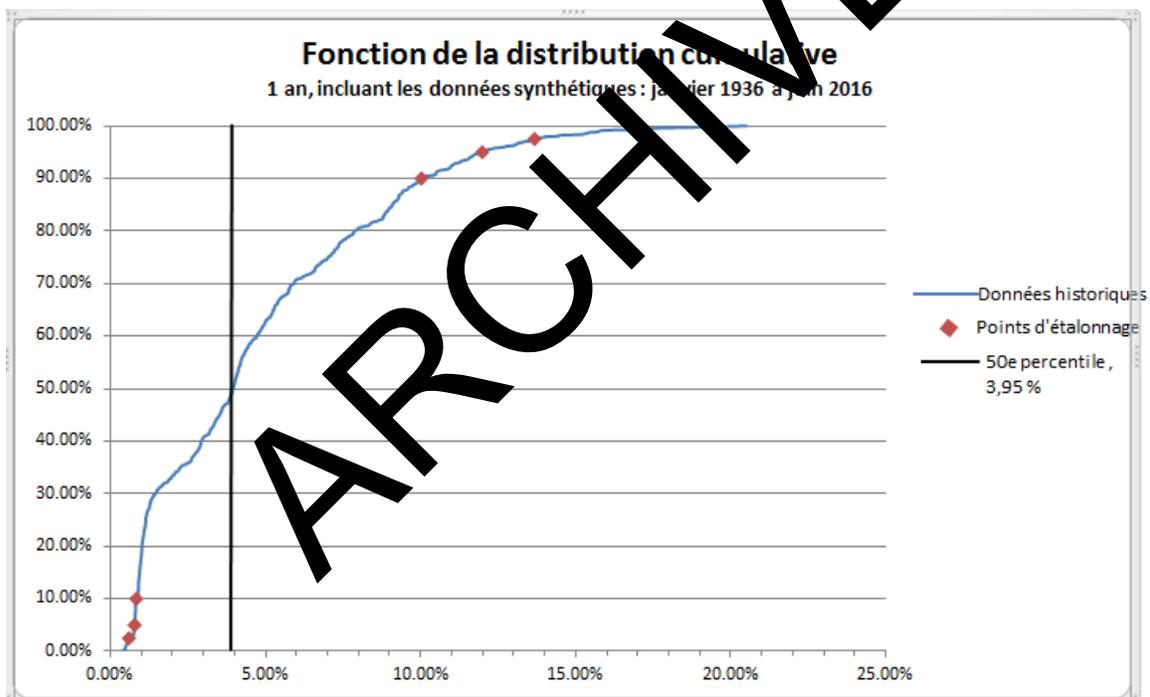
Ces critères d'étalonnage seront respectés si la distribution des taux sur un an qui sont générés par le modèle au point des 60 ans sont inférieurs ou égaux à chacun des critères d'étalonnage de l'extrémité gauche et supérieurs ou égaux à chacun des critères d'étalonnage de l'extrémité droite, avec un taux à court terme initial de 4,5 %. Les critères d'étalonnage sont exprimés en rendements obligataires équivalents.

5.1.1 Comparaison avec les résultats historiques

La comparaison avec l'expérience historique suivante est donnée à des fins de référence.

Percentile		Critères d'étalonnage	Janv. 1936 - juin 2016	Écart
Extrémité gauche	2,5 ^e	0,60 %	0,60 %	0,00 %
	5 ^e	0,80 %	0,78 %	0,02 %
	10 ^e	0,85 %	0,84 %	0,01 %
Extrémité droite	90 ^e	10,00 %	10,03 %	-0,03 %
	95 ^e	12,00 %	12,04 %	-0,04 %
	97,5 ^e	13,65 %	13,69 %	-0,04 %

Les taux d'intérêt historiques se fondent sur les taux réels sur un an entre 1980 et 2016 et sur les taux synthétiques sur un an entre 1936 et 1979. Les critères d'étalonnage sont arrondis en fonction de la distribution historique. Le graphique ci-dessous montre également que les critères d'étalonnage sont bien ajustés à l'expérience historique jusqu'en juin 2016.



5.2 Critères d'étalonnage sur deux ans des taux à court terme

Comme pour le taux d'intérêt sans risque à long terme, des taux à court terme initiaux de 2 %, 4,5 % et 8 % ont été choisis pour représenter les contextes de taux sans risque à court terme faible, moyen et élevé, respectivement. Ceci n'empêche pas l'utilisation du modèle étalonné avec des taux initiaux à court terme inférieurs à 2 % ou supérieurs à 8 %.

Les critères sur un horizon de deux ans pour le taux à court terme sont présentés ci-dessous.

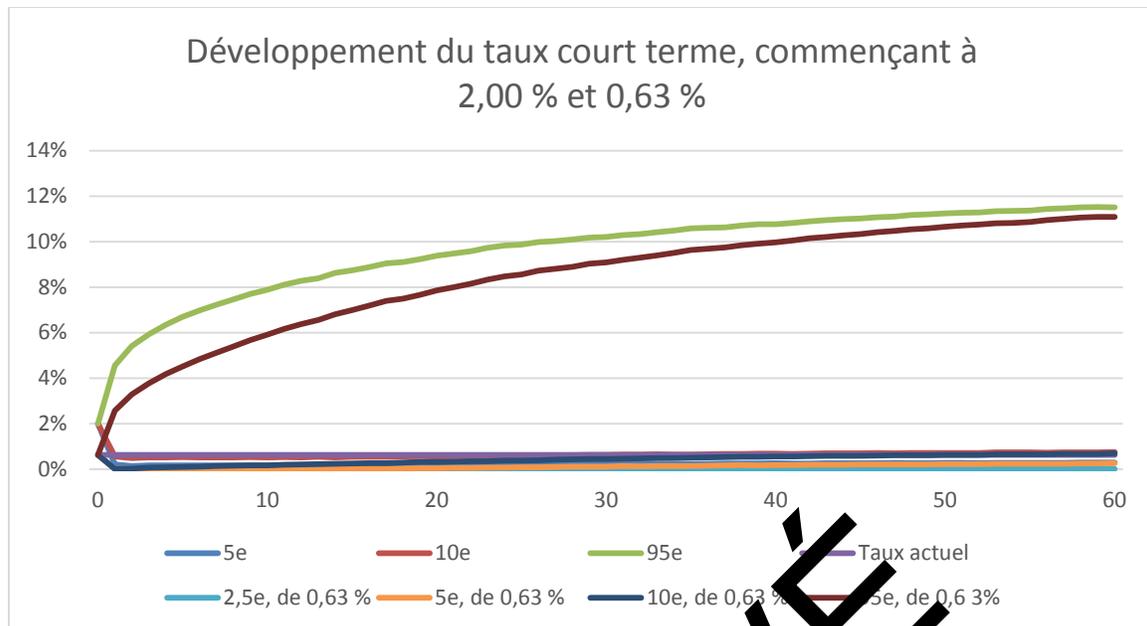
Critères d'étalonnage sur deux ans

Percentile		Taux initial		
		2,00 %	4,50 %	8,00 %
Extrémité gauche	2,5 ^e	0,45 %	1,25 %	2,85 %
	5 ^e	0,65 %	1,55 %	3,55 %
	10 ^e	0,90 %	2,00 %	4,40 %
Extrémité droite	90 ^e	4,25 %	7,50 %	11,00 %
	95 ^e	5,10 %	8,35 %	12,05 %
	97,5 ^e	5,95 %	9,15 %	12,95 %

Ces critères d'étalonnage seront respectés si la distribution de taux sur un an qui sont générés par le modèle à un horizon de deux ans sont inférieurs ou égaux à chacun des critères d'étalonnage de l'extrémité gauche et supérieurs ou égaux à chacun des critères d'étalonnage de l'extrémité droite. Les critères d'étalonnage sont exprimés en rendements obligataires équivalents.

Si le taux initial à court terme réel est inférieur à 2,00 % ou supérieur à 8,00 %, les modèles produiront alors des distributions de scénarios qui sont décalées par rapport aux critères d'étalonnage figurant dans le tableau ci-haut, tel qu'illustré dans le graphique suivant quand le taux initial est inférieur à 2,00 %.

Les changements aux critères d'étalonnage sur un horizon de deux ans sont plus importants que ceux apportés aux critères d'étalonnage sur un horizon de 60 ans. Ceci est attribuable au fait que les points d'étalonnage sur un horizon de 60 ans sont basés sur des données historiques, alors que les paramètres spécifiques utilisés pour le modèle ont une incidence sur les points d'étalonnage sur un horizon de deux ans. Se référer à l'annexe B pour de plus amples renseignements sur les paramètres utilisés pour le modèle.



6. Critères d'étalonnage de la pente sur 60 ans

Il est attendu que les taux à long terme et à court terme soient corrélés. Par conséquent, les critères d'étalonnage de la pente sont fournis. Les critères d'étalonnage permettent aussi de garantir que certains scénarios produisent des courbes de rendement inversées et que d'autres produisent des courbes de rendement prononcées.

La distribution de la pente de la courbe de rendement (définie comme étant la différence entre les taux à long terme et les taux à court terme) satisfait aux critères suivants sur 60 ans de la projection.

Critères d'étalonnage de la pente sur 60 ans

Percentile	Critères d'étalonnage
5 ^e	-1,00 %
10 ^e	-0,10 %
90 ^e	2,50 %
95 ^e	3,00 %

Ces critères d'étalonnage seront satisfaits si la distribution des valeurs de la pente qui sont produites par le modèle à 60 ans dans la projection sont inférieures ou égales à chacun des critères d'étalonnage de l'extrémité gauche et supérieures ou égales à chacun des critères d'étalonnage de l'extrémité droite.

6.1 Comparaison avec l'expérience historique

La comparaison avec l'expérience historique suivante est donnée à des fins de référence.

Percentile	Critères sur 60 ans	Janv. 1936 - Juin 2016	Écart
Extrémité gauche, 5^e	-1,00 %	-0,97 %	-0,03 %
10^e	-0,10 %	-0,10 %	0,00 %
Extrémité droite, 90^e	2,50 %	2,52 %	-0,02 %
95^e	3,00 %	2,98 %	0,02 %

Les pentes historiques se fondent sur l'écart entre les taux réels sur un an et les taux réels sur plus de 10 ans de 1980 à juin 2016 et sur l'écart entre les taux synthétiques sur un an et les taux réels sur plus de 10 ans de 1936 à 1979.

7. Conseils sur les taux à moyen terme

Les taux à moyen terme sont présumés s'inscrire dans la fourchette des échéances de cinq à 10 ans. Des conseils qualitatifs plutôt que des critères d'étalonnage quantitatifs sont fournis pour les taux sans risque à moyen terme.

Le principe directeur qui sous-tend la génération des taux sans risque à moyen terme est que ces taux seraient générés au moyen d'une méthode appropriée qui établit une relation logique entre les taux à moyen terme et ceux à court et à long termes. Selon les particularités de la construction du modèle stochastique de taux d'intérêt sans risque, il est possible de calculer les taux à moyen terme en utilisant l'une ou l'autre des méthodes suivantes. Les taux à moyen terme peuvent être :

1. modélisés directement, avec leur propre processus stochastique (comme ceux décrits à l'annexe B) et avec d'autres points de la courbe de rendement où chacun a son propre processus stochastique, et avec une corrélation appropriée entre les processus; ou
2. modélisés dans le cadre d'une analyse en composantes principales, selon laquelle les changements dans les caractéristiques de la courbe de rendement (ce qui peut inclure, par exemple, un ou plusieurs niveaux, pentes ou courbures de la courbe de rendement) servent à projeter les mouvements de la totalité de la courbe de rendement au fil du temps; ou
3. modélisés de façon à ce que la totalité de la courbe de rendement soit générée au moyen de modèles de structure des échéances des taux d'intérêt, avec un seul ou plusieurs facteurs; ou
4. estimés à partir des taux à court terme et des taux à long terme modélisés, lorsque ces taux sont modélisés avec leurs propres processus stochastiques.

Il convient de souligner qu'il est possible d'étalonner directement les distributions des taux individuels à l'aide des méthodes 1 et 4, mais non des méthodes 2 et 3.

Si la méthode 1 est utilisée, le(s) processus stochastique(s) pour les taux à moyen terme seraient étalonnés de la façon la plus cohérente possible avec à la fois les processus stochastiques des taux à court terme et à long terme, de sorte que le(s) taux à moyen

terme soient cohérents à la fois avec les taux à court terme et à long terme. La cohérence est de mise à la fois pour la méthode des critères d'étalonnage et pour les paramètres définitifs choisis. Ceci est suffisant pour respecter les exigences des conseils sur les taux à moyen terme, pourvu que les taux à long terme et à court terme satisfassent à leurs critères d'étalonnage respectifs.

Si on a recours aux méthodes 2 ou 3 ci-dessus et à condition que le modèle soit établi de manière appropriée et que les taux à court terme et les taux à long terme respectent leurs critères d'étalonnage respectifs, les taux à moyen terme seraient naturellement conformes à ceux à court terme et à long terme. Ceci est suffisant pour respecter les exigences des conseils sur les taux à moyen terme.

Si les taux d'intérêt à moyen terme ne sont pas modélisés et sont plutôt estimés à partir des taux à long terme et des taux à court terme modélisés (c.-à-d. au moyen de la méthode 4), alors les taux à moyen terme peuvent être calculés à l'aide de l'une des techniques d'estimation suivantes données en exemple :

- interpolation non linéaire entre les taux à court terme et les taux à long terme; ou
- analyse de régression avec les taux à court terme et les taux à long terme comme variables indépendantes.

Ces techniques d'estimation permettraient de satisfaire aux exigences relatives aux taux à moyen terme, à condition que les taux à court terme et les taux à long terme satisfassent à leurs critères d'étalonnage respectifs.

Bien que l'actuaire ne soit pas tenu d'appliquer l'une ou l'autre des techniques d'estimation susmentionnées, certaines méthodes seraient considérées comme étant inappropriées. À moins qu'on n'apporte la preuve du contraire, ou sauf si leur application a un impact négligeable, l'interpolation linéaire basée sur les taux à court terme et à long terme ou le fait de supposer que les taux à moyen terme sont identiques à ceux à court ou à long terme n'est pas approprié pour calculer les taux à moyen terme et ne satisferait pas aux exigences des conseils concernant les taux à moyen terme.

8. Production de scénarios

L'actuaire démontrerait d'abord que l'ensemble de taux d'intérêt sans risque stochastiques satisfait à tous les critères d'étalonnage d'après les trois ensembles de taux initiaux fixes, soit :

- taux à court terme de 2,00 %, taux à long terme de 4,00 %;
- taux à court terme de 4,50 %, taux à long terme de 6,25 %;
- taux à court terme de 8,00 %, taux à long terme de 9,00 %.

Il serait nécessaire de démontrer l'étalonnage des critères seulement quand le modèle stochastique de taux d'intérêt sans risque et/ou les paramètres sont mis à jour ou quand les critères d'étalonnage eux-mêmes sont mis à jour.

Les conditions initiales sont demeurées les mêmes que celles découlant de l'examen précédent car elles demeurent raisonnablement proches des taux moyens historiques.

	Moyenne historique	Taux initial
Taux à court terme	4,70 %	4,50 %
Taux à long terme	6,00 %	6,25 %

Une fois qu'il peut être établi que le modèle stochastique de taux d'intérêt sans risque est bien étalonné, le modèle peut être utilisé pour générer des scénarios de taux d'intérêt aux fins d'évaluation en utilisant les mêmes paramètres et à tout le moins le nombre de scénarios⁶ utilisés pour démontrer l'étalonnage en fonction des critères et en utilisant les taux d'intérêt sans risque initiaux réels qui sont appropriés pour la date d'évaluation.

Il est possible de n'utiliser qu'un sous-ensemble des scénarios dans l'évaluation réelle selon la MCAB. Une discussion portant sur les techniques de réduction des scénarios ne s'inscrit pas dans la portée du présent supplément de note éducative et l'actuaire consulterait la documentation disponible à ce sujet. L'actuaire peut aussi se reporter à la sous-section 1510 des normes de pratique au sujet du recours à des approximations.

9. Critères d'étalonnage pour d'autres pays

Les scénarios produits à partir des modèles stochastiques de taux d'intérêt sans risque qui satisfont aux critères d'étalonnage conviendraient aux fins des évaluations fondées sur des hypothèses de réinvestissement sans risque au Canada. Un actuaire qui construit un modèle stochastique de taux d'intérêt sans risque pour les obligations du gouvernement américain et les économies de plusieurs autres pays industrialisés (mais non de tous les pays industrialisés) prendrait en compte ces critères comme point de départ et y apporterait les ajustements jugés appropriés. En faisant preuve d'un tel jugement, on peut tenir compte de l'historique des taux, des données sur les marchés et des conditions économiques et politiques. Si des critères d'étalonnage pertinents au pays ou à la devise qui fait l'objet de la modélisation ont été publiés, on pourrait y avoir recours comme autre source de renseignements et pour aider l'actuaire à se faire une opinion. L'utilisation de ces critères d'étalonnage peut être acceptable s'il est possible de prouver qu'ils sont conformes en règle générale aux critères d'étalonnage énoncés

⁶ Il est aussi possible d'exécuter moins de scénarios que le nombre de scénarios utilisés aux fins de l'étalonnage, ce qui fait alors partie des techniques de réduction des scénarios et du recours à des approximations.

⁷ Par exemple, le document de l'American Academy of Actuaries intitulé « [Modeling Efficiency Bibliography for Practicing Actuaries](#) », publié en décembre 2011, renferme un certain nombre de références relativement aux techniques de réduction du nombre de scénarios comme le document de Chueh, Yvonne « [Efficient Stochastic Modeling for Large and Consolidated Insurance Business: Interest Rate Sampling Algorithms](#) » publié dans le *North American Actuarial Journal* en juillet 2002.

dans le présent supplément de note éducative (soit les critères d'étalonnage sont eux-mêmes dans l'ensemble conformes, soit l'approche appliquée pour élaborer les critères d'étalonnage est dans l'ensemble conforme au présent supplément de note éducative). S'il est impossible de le prouver, il ne serait alors pas approprié d'utiliser les critères d'étalonnage de l'autre pays sans procéder à des ajustements.

Les pays où les taux ont été inhabituellement faibles récemment ou élevés pendant de longues périodes constitueraient des exemples où il peut ne pas être approprié d'avoir recours aux critères d'étalonnage. Dans certains pays, l'historique peut être limité et il peut être nécessaire d'avoir une distribution plus large des taux relativement à ces observations limitées afin de prévoir une marge pour incertitude.

Enfin, il ne serait pas approprié d'appliquer les critères d'étalonnage aux marchés dont l'économie est en développement ou en émergence.

ARCHIVÉ

Annexe A

On établit le passif selon la MCAB en modélisant les flux monétaires de l'actif et du passif en fonction d'un ensemble défini de scénarios et en comparant les soldes du passif des contrats d'assurance qui en découlent. Si l'approche déterministe est adoptée, l'ensemble des scénarios est celui prescrit à la sous-section 2330 des normes de pratique auquel s'ajoutent les scénarios supplémentaires que l'actuaire juge appropriés en fonction du profil de risque du passif des contrats d'assurance. Le passif des contrats d'assurance est établi pour se trouver dans la fourchette supérieure des résultats qui en découle et est au moins aussi élevé que le passif des contrats d'assurance le plus élevé découlant des scénarios prescrits. Si une approche stochastique est utilisée, un grand nombre de scénarios de taux d'intérêt différents est généré de manière stochastique, le passif des contrats d'assurance étant calculé pour chaque scénario. Le passif des contrats d'assurance est établi, à la discrétion de l'actuaire, pour être conforme aux normes de pratique.

Modélisation stochastique des taux d'intérêt

La modélisation stochastique des taux d'intérêt se rapproche de la modélisation stochastique du rendement des actions (qui sert habituellement à modéliser les garanties d'investissement de rente variable). Elle se différencie en ce sens qu'une part importante de la modélisation des fluctuations des taux d'intérêt repose habituellement sur une hypothèse de taux non négatifs ou sur une valeur plancher quant à la valeur négative que peuvent atteindre les taux négatifs et, généralement, sur une certaine forme de retour à la moyenne. La moyenne est habituellement choisie en fonction d'un ensemble pertinent de taux d'intérêt historiques. Le modèle stochastique de taux d'intérêt sans risque utilisé servira à définir la manière dont les taux fluctuent d'une période à l'autre au moyen d'une formule appliquée aux valeurs générées grâce à une simulation Monte Carlo. Les paramètres du modèle stochastique de taux d'intérêt sans risque représentent typiquement le niveau de retour à la moyenne, la volatilité et la force (ou la vitesse) du retour à la moyenne à long terme. Nous ne prescrivons pas, dans ce supplément de note éducative sur les critères d'étalonnage, le type de modèle stochastique de taux d'intérêt sans risque ou l'établissement des paramètres, mais nous mettons plutôt l'accent sur les scénarios découlant de l'application du générateur de scénarios. L'actuaire a ainsi la marge de manœuvre nécessaire pour choisir l'une des formulations types de modèle ou en modifier une pour créer un nouveau modèle stochastique de taux d'intérêt sans risque qui convient davantage à l'application sous étude.

Choix de la modélisation stochastique au lieu de la modélisation déterministe

La modélisation stochastique des taux d'intérêt ne s'éloigne pas radicalement des mesures déterministes. Il s'agit d'une forme améliorée d'essai de scénarios dans le cadre de laquelle un grand nombre de scénarios aléatoires sont élaborés à l'aide d'un modèle qui est une représentation de l'évolution des taux d'intérêt dans l'environnement réel. Pour décider s'il aurait recours à la modélisation stochastique des taux d'intérêt à des fins d'évaluation, l'actuaire tiendrait compte de la complexité de

l'interaction entre les taux d'intérêt et les flux monétaires de l'actif et du passif dans le modèle de la MCAB, et de l'importance de l'impact de la volatilité des taux d'intérêt sur les résultats. Si le produit est conçu de façon à ce que la plupart des sorties de fonds du passif se feront dans une fourchette relativement étroite autour de la moyenne de la distribution des résultats, l'approche qui consiste à utiliser la meilleure estimation plus une marge explicite est appropriée. Si, cependant, il y a des sorties de fonds importantes qui ne se produisent que dans les zones à faible probabilité de la distribution (les extrémités), une approche stochastique peut alors produire une image plus appropriée de la portée des expositions des taux d'intérêt. La modélisation stochastique de taux d'intérêt sans risque peut aussi se révéler l'approche privilégiée s'il n'y a aucune meilleure estimation naturelle, par exemple lorsqu'il s'agit de modéliser les taux d'intérêt disponibles à des fins de réinvestissement dans 25 ans ou plus.

Considérations d'ordre pratique

Le passif stochastique selon la MCAB correspond à la moyenne d'un sous-ensemble des passifs des contrats d'assurance les plus élevés qui en découlent. Il importe de souligner que cela peut vouloir dire que le passif des contrats d'assurance correspond à une moyenne des scénarios qui ne sont ni les scénarios de taux d'intérêt les plus faibles ni les scénarios de taux les plus élevés. Prenons, par exemple, un produit avec flux monétaires positifs nets élevés provenant de primes pour les dix prochaines années, et avec flux monétaires négatifs découlant au cours des dix années subséquentes, de sorte que, à l'année 20, la masse des flux monétaires soit négative, les prestations excédant alors les primes et flux monétaires d'actifs. Un scénario défavorable comportera alors de faibles taux d'intérêt pendant les dix premières années et des taux plus élevés pendant les années après l'année 20. Il s'agit d'un résultat naturel de la modélisation stochastique. S'il faut déterminer un facteur de taux d'intérêt moyen unique afin de subdiviser un bloc de contrats après l'exécution de la MCAB, alors un curieux schéma pourrait en résulter.

Annexe B

Dans cette annexe, nous présentons les paramètres et les spécifications des modèles pour les formes de modèles stochastiques de taux d'intérêt sans risque utilisés dans l'élaboration des critères d'étalonnage dans le présent supplément de note éducative.

Cette information est transmise à des fins de transparence et pour aider l'actuaire à comprendre comment les modèles stochastiques de taux d'intérêt sans risque fonctionnent et sont étalonnés et utilisés pour définir les critères. L'actuaire est mis en garde contre le fait de simplement appliquer ces modèles stochastiques de taux d'intérêt sans risque dans le cadre de son travail; il est préférable d'acquérir suffisamment d'expertise afin de pouvoir porter un jugement actuariel dans le choix d'une forme particulière de modèle stochastique de taux d'intérêt sans risque et des paramètres conformément aux critères d'étalonnage.

Les formes de modèle **Brennan-Schwartz** suivantes ont été utilisées pour élaborer et mettre à l'essai les critères :

Taux à long terme :

$$r_t^l = (1 - \alpha_1)r_{t-1}^l + \alpha_1\tau_1 + \sigma_1 r_{t-1}^l$$

Taux à court terme :

$$r_t^s = \max\left((1 - \alpha_2)r_{t-1}^s + \alpha_2\tau_2 + \sigma_2(r_{t-1}^s - d)\zeta_t, \text{plancher}\right)$$

Où pour $i = 1, 2$:

τ_i correspond au niveau du retour à la moyenne auquel le processus retourne;

α_i correspond à la vitesse du retour à la moyenne;

σ_i est le paramètre de volatilité;

d est le paramètre de déplacement;

$$\varepsilon_t, \xi_t \sim N(0, 1)$$

$$\rho = \text{correl}(\varepsilon_t, \xi_t)$$

$$\text{plancher} = -0,75 \%$$

Le choix d'une valeur plancher de -0,75% se base sur le point le plus bas observé parmi les données historiques du taux 1 an en Allemagne. Il a été jugé approprié de prévoir des taux négatifs dans la définition des paramètres des modèles, compte tenu de l'expérience récemment observée dans certains pays de l'Organisation de coopération et de développement économiques (OCDE), plus particulièrement en Allemagne et au Japon.

La forme continue du modèle Brennan-Schwartz ne produit pas de taux d'intérêt négatifs. La forme discrète en produit en de rares occasions. Afin de permettre une exposition raisonnable aux taux négatifs dans le cas du taux à court terme, un terme de déplacement est ajouté à la composante de diffusion du modèle à court terme. La volatilité est graduée selon le taux – déplacement. Le paramètre de déplacement a été fixé à -1,0 %, afin qu'une forte volatilité produise des taux négatifs (environ 1,0 % des taux projetés à l'année 60) et qu'il y ait un écart entre la valeur plancher et le taux le plus bas obtenu.

Pour déterminer les critères, deux ensembles de paramètres sont pris en compte et sont indiqués dans le tableau suivant. Les paramètres annualisés sont indiqués ci-après aux fins d'illustration tandis que les paramètres mensuels correspondants ont été utilisés en pratique dans la modélisation.

- Deux différents ensembles de paramètres sont indiqués afin de montrer qu'il existe plusieurs de façons de paramétrer le modèle et de satisfaire en même temps aux critères d'étalonnage.
 - La vitesse de retour à la moyenne est le coefficient de régression linéaire de la relation entre le taux actuel (r_t) et sa valeur précédente (r_{t-1}).
 - Deux valeurs de la vitesse de retour à la moyenne ont été déterminées en utilisant deux périodes historiques différentes.
 - Le paramètre de corrélation est estimé comme étant la corrélation historique entre les mouvements du taux à long terme et du taux à court terme pendant cette même période.
- Niveau cible de retour à la moyenne et volatilité : Ils ont été déterminés avec des méthodes statistiques afin que les scénarios s'ajustent à la distribution historique de janvier 1980 à juin 2016. Les modèles avec retour à la moyenne plus rapide ont une plus grande volatilité afin de satisfaire aux critères d'étalonnage à l'année 60.

Annualisés Paramètres ($i = 1, 2$) Modèle de taux	Ensemble de paramètres 1		Ensemble de paramètres 2	
	Modèle de taux à long terme	Modèle de taux à court terme	Modèle de taux à long terme	Modèle de taux à court terme
α_i	3,50 %	7,46 %	4,25 %	8,04 %
$(1 / \alpha_i)^8$	(28,6 ans)	(13,4 ans)	(23,5 ans)	(12,4 ans)
τ_i	6,14 %	4,88 %	6,14 %	4,88 %
σ_i	14,38 %	32,35 %	15,84 %	33,55 %
ρ	0,6964		0,6998	

ARCHIVÉ

La forme de modèle **CIR** suivante a été utilisée pour élaborer et mettre à l'essai les critères.

Taux à long terme :

$$r_t^l = (1 - \alpha)r_{t-1}^l + \alpha\tau + \sigma_1\sqrt{r_{t-1}^l}\varepsilon_t$$

Taux à court terme :

$$r_t^s = \text{maximum}((1 - \phi)r_{t-1}^s + \phi(r_{t-1}^l - \theta) + \beta(r_t^l - r_{t-1}^l) + \sigma_2\sqrt{r_{t-1}^l}\zeta_t, \text{plancher})$$

où

τ correspond au niveau du retour à la moyenne auquel le taux à long terme retourne;

α correspond à la vitesse du retour à la moyenne des taux à long terme;

σ_1 est le paramètre de volatilité des taux à long terme;

θ représente l'écart stationnaire entre les taux à court terme et les taux à long terme;

ϕ correspond à la vitesse de retour à la moyenne de l'écart entre les taux à long terme et à court terme;

β est une constante liée à la fluctuation des taux à long terme d'une période à l'autre;

σ_2 est le paramètre de volatilité des taux à court terme;

$\varepsilon_t, \zeta_t \sim N(0,1)$

$\rho = \text{correl}(\varepsilon_t, \zeta_t)$

$\text{plancher} = 0,01\%$

Trois ensembles de paramètres sont utilisés pour élaborer les critères et les paramètres sont estimés en adaptant les formes du modèle à leurs critères d'étalonnage respectifs sur un horizon de 60 ans. Les paramètres annualisés sont indiqués ci-dessous aux fins d'illustration tandis que les paramètres mensuels correspondants ont été utilisés en pratique dans la modélisation.

Paramètres annualisés ($i = 1, 2$)	Ensemble de paramètres 1		Ensemble de paramètres 2		Ensemble de paramètres 3	
	Modèle de taux à long terme	Modèle de taux à court terme	Modèle de taux à long terme	Modèle de taux à court terme	Modèle de taux à long terme	Modèle de taux à court terme
α ($1/\alpha$)	3,50 % (28,6 ans)	s.o.	4,25 % (23,5 ans)	s.o.	5,00 % (20,0 ans)	s.o.
ϕ ($1/\phi$)	s.o.	43,56 % (2,3 ans)	s.o.	48,08 % (2,1 ans)	s.o.	48,08 % (2,1 ans)
τ	6,30 %	s.o.	6,30 %	s.o.	6,30 %	s.o.
σ_j	3,19 %	7,77 %	3,52 %	8,03 %	7,82 %	7,94 %
θ	s.o.	1,44 %	s.o.	1,47 %	s.o.	1,47 %
β	s.o.	9,50 %	s.o.	4,17 %	s.o.	54,47 %
ρ	0,6017		0,4445		0,4151	

- Trois différents ensembles de paramètres sont indiqués afin de montrer qu'il existe plusieurs façons de paramétrer le modèle et de satisfaire en même temps aux critères d'étalonnage :
 - La vitesse de retour à la moyenne est le coefficient de régression linéaire de la relation entre le taux actuel (r_t) et sa valeur précédente (r_{t-1}).
 - Trois valeurs de la vitesse de retour à la moyenne ont été déterminées en utilisant différentes périodes historiques.
 - Pour le modèle de taux à court terme : Les données historiques montrent que les écarts retournent à leur valeur moyenne beaucoup plus vite que ne le font les taux à court ou à long terme, ce qui explique la valeur élevée du paramètre ϕ .
 - La constante β et le paramètre de corrélation ρ qui lient les taux à court et à long terme sont déterminés par estimation du maximum de vraisemblance.
- Niveau cible de retour à la moyenne et volatilité : Ils sont le résultat de méthodes statistiques afin que les scénarios s'ajustent à la distribution historique de janvier 1936 à juin 2016. Les modèles avec retour à la moyenne

plus rapide ont une plus grande volatilité afin de satisfaire aux critères d'étalonnage à l'année 60.

Lorsqu'utilisés pour déterminer les critères d'étalonnage sur deux et 10 ans, les paramètres du modèle de taux à long terme (Brennan-Schwartz ou CIR) sont utilisés uniquement avec les paramètres du modèle de taux à court terme correspondant. Les critères d'étalonnage des taux à long terme dépendent uniquement des formes de modèles de taux à long terme. Les taux ont été projetés à un intervalle mensuel et au moins 10 000 scénarios ont été exécutés pour atteindre la convergence.

ARCHIVÉ

ANNEXE C

Dans la présente annexe, nous résumons comment les critères d'étalonnage des taux d'intérêt sans risque à long terme présentés dans ce supplément de note éducative se comparent aux critères d'étalonnage originaux présentés dans le document de recherche de 2013.

Les critères révisés et les critères précédents sont indiqués dans les tableaux suivants.

Taux d'intérêt à long terme															
		Critères publiés (en %)						Critères révisés (en %)							
Horizon:		2 ans		10 ans			60 ans	2 ans			10 ans			60 ans	
Taux initial :		4 %	6,25 %	9 %	4 %	6,25 %	9 %	6,25 %	4 %	6,25 %	9 %	4 %	6,25 %	9 %	6,25 %
Percentile, extrémité gauche	2,5 ^e	2,85	4,25	6,20	2,30	2,90	3,45	2,60	2,70	4,25	6,40	2,25	2,85	3,95	2,30
	5 ^e	3,00	4,50	6,60	2,50	3,20	4,25	2,80	3,00	4,55	6,80	2,45	3,15	4,50	2,60
	10 ^e	3,25	4,80	7,05	2,85	3,65	4,95	3,00	3,20	4,90	7,20	2,80	3,70	5,15	2,90
Percentile, extrémité droite	90 ^e	5,15	7,80	10,60	6,25	8,95	11,60	10,00	5,20	7,65	10,50	6,90	9,10	11,50	10,00
	95 ^e	5,55	8,30	11,25	7,85	10,40	12,80	12,00	5,55	8,10	11,00	7,90	10,10	12,60	11,90
	97,5 ^e	5,85	8,70	11,70	8,85	11,40	13,90	13,50	5,90	8,50	11,50	8,70	10,95	13,60	13,30

Taux à court terme (en %)									
		Critères publiés (en%)				Critères révisés (en%)			
Horizon		2 ans			60 ans	60 ans			60 ans
Taux initial :		2 %	4,5 %	8 %	4,5 %	2 %	4,5 %	8 %	
Percentile, extrémité gauche	2,5 ^e	0,85	2,35	5,50	0,80	0,45	1,20	2,85	0,60
	5 ^e	1,00	2,70	5,95	0,90	0,65	1,55	3,55	0,80
	10 ^e	1,15	3,10	6,40	1,00	0,90	2,00	4,40	0,85
Percentile, extrémité droite	90 ^e	3,00	5,90	9,75	10,00	4,25	7,50	11,00	10,00
	95 ^e	3,35	6,30	10,25	12,00	5,20	8,35	12,05	12,00
	97,5 ^e	3,60	6,65	10,65	13,50	5,95	9,15	12,95	13,65

Pour les critères d'étalonnage des taux à long terme, les écarts entre les critères actuels et les critères précédents dans le document de recherche de 2013 sont indiqués dans le tableau suivant.

Changement dans les critères d'étalonnage (Révisés à publiés (en %))								
Horizon :		2 ans			10 ans			60 ans
Taux initial :		4%	6.25%	9%	4%	6.25%	9%	6.25%
Percentile, Extrémité gauche	2,5 ^e	(0,15)	-	0,20	(0,05)	(0,05)	0,30	(0,30)
	5 ^e	-	0,05	0,20	(0,05)	(0,05)	0,25	(0,20)
	10 ^e	(0,05)	0,10	0,15	(0,05)	0,05	0,20	(0,10)
Percentile, extrémité droite	90 ^e	0,05	(0,15)	(0,10)	0,05	(0,25)	(0,10)	-
	95 ^e	-	(0,20)	(0,20)	0,05	(0,30)	(0,20)	(0,10)
	97,5 ^e	0,05	(0,20)	(0,20)	(0,15)	(0,45)	(0,20)	(0,20)

Pour les critères d'étalonnage des taux à court terme, les écarts entre les critères actuels et les critères précédents dans le document de recherche de 2013 sont indiqués dans le tableau suivant.

Changement dans les critères d'étalonnage (en %)					
Horizon		2 ans			60 ans
Taux initial :		2 %	4,5 %	8 %	4,5 %
Percentile, extrémité gauche	2,5 ^e	(0,40) %	(1,10) %	(2,65) %	(0,20)
	5 ^e	(0,35) %	(1,15) %	(2,40) %	(0,10)
	10 ^e	(0,25) %	(1,10) %	(2,00) %	(0,15)
Percentile, extrémité droite	90 ^e	1,25 %	1,60 %	1,25 %	-
	95 ^e	1,75 %	2,05 %	1,80 %	-
	97,5 ^e	2,35 %	2,50 %	2,30 %	0,15

ARCHIVÉ

Annexe D

Les critères d'étalonnage visent entre autres objectifs à garantir que les scénarios représentent adéquatement les périodes soutenues de faibles taux, pendant lesquelles le revenu de placement sur les réinvestissements nécessaires pour supporter les garanties à long terme est limité. Même si les critères d'étalonnage d'extrémité évalués à un horizon ponctuel de la projection permettent dans une certaine mesure de garantir ce résultat, ils n'excluent pas les modèles stochastiques de taux d'intérêt sans risque qui produisent des scénarios dont les périodes de faibles taux ont tendance à être de courte durée, et donc peu de scénarios présenteraient de faibles taux d'intérêt répartis en moyenne sur une période potentiellement longue durant laquelle le réinvestissement pourrait avoir un impact financier important. Il est possible de démontrer statistiquement l'existence de périodes soutenues de faibles taux si les scénarios qui sont relativement faibles dans les premières années ont tendance à le demeurer dans les années ultérieures. Par exemple, bien qu'il existe d'autres approches possibles et à défaut de recourir à une preuve mathématique, il est possible de démontrer que le critère de retour à la moyenne est respecté à l'aide de la procédure suivante :

1. Trier les scénarios selon les taux à long terme, du plus faible au plus élevé, à l'année de projection T_0 , où T_0 correspond à une période suffisamment longue pour présenter une dispersion substantielle des taux, mais n'excédant pas la plupart des réinvestissements prévus. Pour un bloc type garanti à long terme, T_0 pourrait varier entre cinq et 10 ans.
2. Regrouper les scénarios en fonction du quartile des taux à T_0 , du plus faible (quartile 1) au plus élevé (quartile 4). Calculer l'ampleur de la dispersion des scénarios de faible taux, de la dispersion des scénarios centraux (T_0) = taux moyen (T_0) dans la combinaison des quartiles (quartiles 2 et 3) – taux moyen (T_0) dans le quartile 1.
3. En utilisant le même regroupement des scénarios (classés à la période T_0 , et *non* reclassés à la période T_0+10), calculer la dispersion 10 ans plus tard (T_0+10 , classé T_0) = taux moyen (T_0+10) dans la combinaison des quartiles (quartiles 2 et 3) – taux moyen (T_0) dans le quartile 1.
4. Le critère du retour à la moyenne pendant la période de projection de T_0 à $T_0 +10$ est respecté si la dispersion (T_0+10 , classée T_0) $\geq 0,5 * \text{dispersion } (T_0)$.
5. Si l'actuaire peut démontrer que le taux du retour à la moyenne du modèle est tout aussi robuste sur d'autres périodes de projection, cette mise à l'essai unique serait suffisante. Sinon, la mise à l'essai serait répétée pour des périodes d'impact financier suffisamment importantes pour démontrer l'existence des périodes soutenues de faibles taux.
6. Si, selon l'actuaire, la persistance des taux élevés cause des tensions financières pour une application en particulier, la démonstration serait répétée pour ces taux (quartile 4 par rapport aux quartiles 2 et 3).

Il est possible de démontrer qu'un modèle avec un régime unique et un retour à la moyenne linéaire simple (c.-à-d., $E(r(t+dt)) = r(t) + (1/\text{période de retour}) * dt * (\text{moyenne à long terme} - r(t))$) satisfait à ce critère d'étalonnage (avec un nombre suffisant de scénarios) si la période du retour $> 14,5$ ans⁸. Si la période de projection (dt) est supérieure à un mois, il se peut qu'il faille apporter un léger rajustement au seuil de la période du retour à la moyenne.

On n'aurait habituellement pas recours à des modèles comportant des caractéristiques qui invalideraient le but statistique de ce critère (c.-à-d., une composante cyclique des taux avec une périodicité d'environ 10 ans). Si des circonstances exceptionnelles font en sorte que l'actuaire estime qu'un modèle du genre est approprié, l'actuaire élaborerait des méthodes statistiques robustes convenant aux caractéristiques du modèle pour démontrer l'existence de périodes soutenues importantes de faibles taux, conformément à ce critère.

Enfin, il semble probable que les modèles stochastiques de taux d'intérêt sans risque qui, à la fois, satisfont aux critères d'étalonnage de l'extrême et à l'équilibre à long terme et reproduisent de près la volatilité historique répondront aussi au critère du retour à la moyenne, même si pour certains modèles, il faudra peut-être apporter de légers ajustements aux paramètres. Certaines estimations de retour à la moyenne basées sur la concordance statistique avec l'historique des fluctuations des taux peuvent produire un retour à la moyenne plus fort (période plus courte) dans une certaine mesure ou plus faible (période plus longue) que celui généré par ce critère d'étalonnage. Les estimations statistiques du retour à la moyenne ont tendance à comporter une bonne dose d'incertitude et peuvent varier considérablement selon la période historique utilisée pour l'estimation. Ainsi, un retour à la moyenne plus fort que celui généré par ce critère, même s'il s'agit d'une meilleure estimation statistique, peut donner un sentiment de confiance temporel relativement à la probabilité de périodes soutenues de taux extrêmes.

⁸ Avec ce simple retour à la moyenne, à la limite continue, $E(r(t+n)) = \text{moyenne à long terme} + \exp(-n/\text{période de retour}) * (r(t) - \text{moyenne à long terme})$. Pour une période écoulée n de 10 ans, le coefficient de pondération de dégradation exponentielle sur le taux initial sera $\geq 0,5$ lorsque la période du retour à la moyenne sera $\geq 10 / \ln(2) = 14,42$.

ANNEXE E

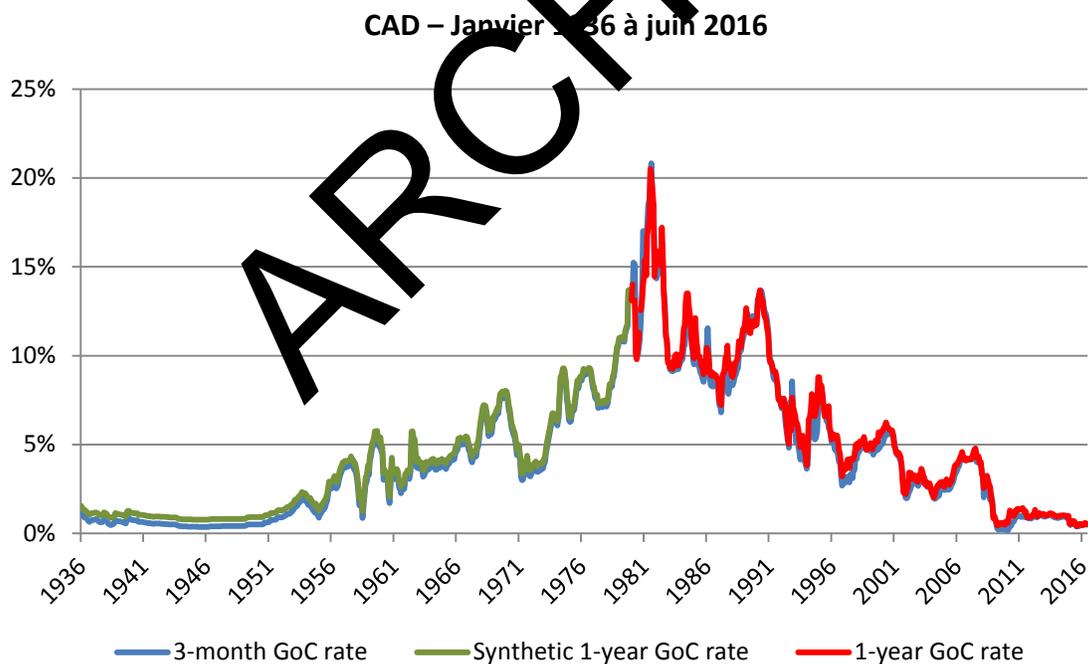
Nous avons estimé les taux historiques sur un an entre 1936 et 1979 de la manière suivante :

- Commencer avec deux séries mensuelles de données historiques, soit les taux sur trois mois (Banque du Canada, série V122541) et les taux sur un an (Banque du Canada, série V122533). Appairer les données selon les dates.
- Effectuer une régression linéaire par la méthode des moindres carrés en utilisant toutes les paires de données disponibles, afin d'estimer la relation entre les taux sur trois mois et sur un an.
 - Pour l'analyse effectuée pour ce supplément de note éducative, les paires de données recouvraient la période de janvier 1980 à juin 2016.
 - Formule estimée de régression linéaire, basée sur ces paires :

$$\text{Taux sur un an} = 0,413289 \% + 0,974584 \times \text{Taux sur trois mois}$$

- Lorsque le taux sur trois mois est disponible, mais que le taux sur un an n'est pas, utiliser la fonction de régression linéaire estimée avec les données disponibles, pour calculer un taux sur un an « synthétique ».

La série chronologique finale des taux sur un an figure dans le graphique ci-dessous de même que la série chronologique des taux sur trois mois aux fins de comparaison.



Source : Banque du Canada, séries V122541 et V122533