

Document de recherche

Méthode de modélisation stochastique pour la construction d'échelles bidimensionnelles d'amélioration de la mortalité à l'usage des régimes de retraite et des assureurs au Canada

Préparé par :
Johnny Siu-Hang Li
Département de statistique et de science actuarielle, Université de Waterloo
Yanxin Liu
Faculté de finance, Université du Nebraska, Lincoln, Nebraska, É.-U.

Février 2019

Document 219015

*This document is available in English
© 2019 Institut canadien des actuaires*

Les documents de recherche ne représentent pas nécessairement l'opinion de l'Institut canadien des actuaires. Les membres devraient connaître les documents de recherche. Les documents de recherche ne constituent pas des normes de pratique et sont donc de caractère non exécutoire. Il n'est pas obligatoire que les documents de recherche soient conformes aux normes de pratique. Le mode d'application de normes de pratique dans un contexte particulier demeure la responsabilité des membres.

Méthode de modélisation stochastique pour la construction d'échelles bidimensionnelles d'amélioration de la mortalité à l'usage des régimes de retraite et des assureurs au Canada¹

Johnny Siu-Hang Li² et Yanxin Liu³

Résumé

Ces derniers temps, les professions actuarielles au Canada, aux États-Unis et au Royaume-Uni ont adopté une méthode novatrice bidimensionnelle pour projeter la mortalité future. Contrairement à la méthode traditionnelle, la méthode bidimensionnelle permet aux taux d'amélioration de la mortalité de varier non seulement avec l'âge, mais aussi avec le temps. Bien qu'il s'agisse d'une percée importante, les échelles bidimensionnelles d'amélioration de la mortalité nouvellement proposées présentent plusieurs lacunes considérables, notamment le recours important au jugement d'experts et l'absence de mesures d'incertitude. Dans le présent document, nous développons une méthode pour produire des échelles bidimensionnelles d'amélioration de la mortalité qui reposent sur des fondements statistiques plus solides. À cette fin, nous proposons un modèle « d'onde thermique », selon lequel les améliorations de la mortalité à court et à long termes sont traitées respectivement comme étant des « ondes thermiques » qui diminuent progressivement avec le temps et des « améliorations de fond » qui existent toujours. Forts de ce modèle, nous pourrions calculer des échelles bidimensionnelles d'amélioration de la mortalité sans n'avoir guère besoin de recourir au jugement d'experts. De plus, en utilisant des méthodes d'inférence basées sur la vraisemblance, nous pourrions quantifier l'incertitude entourant la meilleure estimation des taux d'amélioration de la mortalité.

1. Introduction

Dans le monde développé, l'espérance de vie a augmenté constamment, sauf en périodes de guerre et de pandémie mondiales. Pour prendre en compte les améliorations futures de la mortalité dans les activités de tarification et d'évaluation, les actuaires ont souvent recours à des échelles d'amélioration, qui spécifient les taux attendus de réduction de la mortalité au moyen de formules mathématiques simples. Ils peuvent obtenir une projection de la mortalité future en appliquant une échelle d'amélioration appropriée à une « table de mortalité de base », qui tient compte du niveau de mortalité actuel du groupe de retraités ou d'assurés à l'étude.

¹ Adresse de correspondance de Johnny Siu-Hang Li, Département de statistique et de science actuarielle de l'Université de Waterloo, 200, avenue University Ouest, Waterloo, Ontario, Canada, N2L 3G1. Courriel : shli@uwaterloo.ca

² Département de statistique et de science actuarielle, Université de Waterloo, Ontario, Canada.

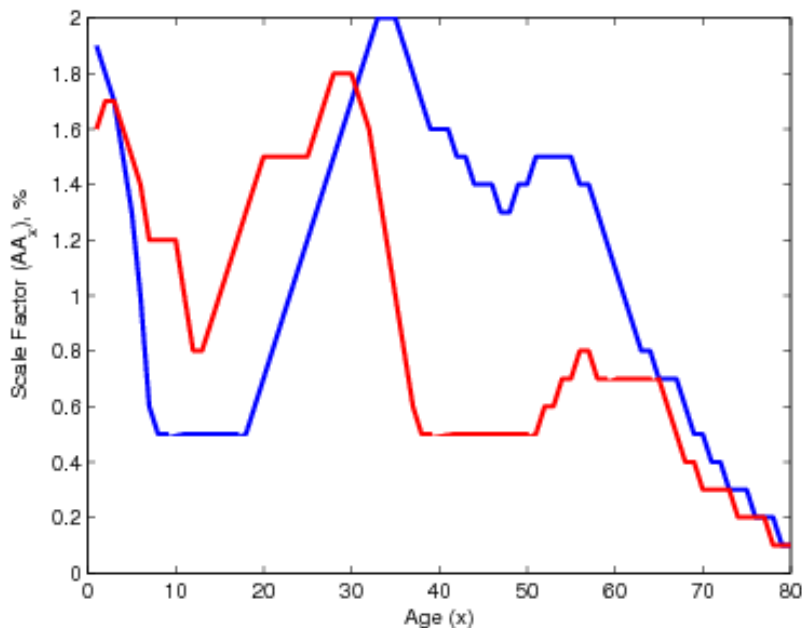
³ Département de finance, Université du Nebraska, Lincoln, Nebraska, É.-U.

Depuis un certain temps, les régimes de retraite au Canada et aux États-Unis utilisent couramment l'échelle AA de la Society of Actuaries (SOA) (1995) aux fins d'évaluation. Selon cette échelle, les probabilités de décès t années après l'année de base t_b sont calculées à l'aide de l'équation suivante :

$$q_{x,t_b+t} = q_{x,t_b}(1 + AA_x)^t,$$

où q_{x,t_b} est le taux de mortalité⁴ pour l'âge x indiquée dans la table de base et AA_x représente le taux attendu d'amélioration de la mortalité à l'âge x (graphique 1). L'un des problèmes de l'échelle AA est qu'elle sous-estime l'amélioration de la mortalité enregistrée au cours des dernières années. Ce problème est illustré au tableau 1, où nous comparons l'échelle AA aux taux d'amélioration annualisés réalisés entre 1996 et 2005 (la décennie suivant la publication de l'échelle AA).

Graphique 1 : Valeurs de AA_x dans l'échelle AA, hommes et femmes



Les hommes sont représentés en bleu.
Les femmes sont représentées en rouge.

**Disponible en anglais seulement.*

⁴ Plus précisément, $q_{x,t}$ est la probabilité qu'un individu âgé exactement de x à l'instant $t - 1$ (soit au début de l'année t) décède durant l'intervalle de temps $[t - 1, t)$.

Tableau 1 : Échelle AA et taux réels de réduction de la mortalité au Canada de 1996 à 2005 pour plusieurs groupes d'âge. Les taux réels de réduction sont calculés à l'aide de taux de mortalité lissés obtenus par ajustement d'une régression de P-splines (Currie et coll., 2004) aux données brutes.

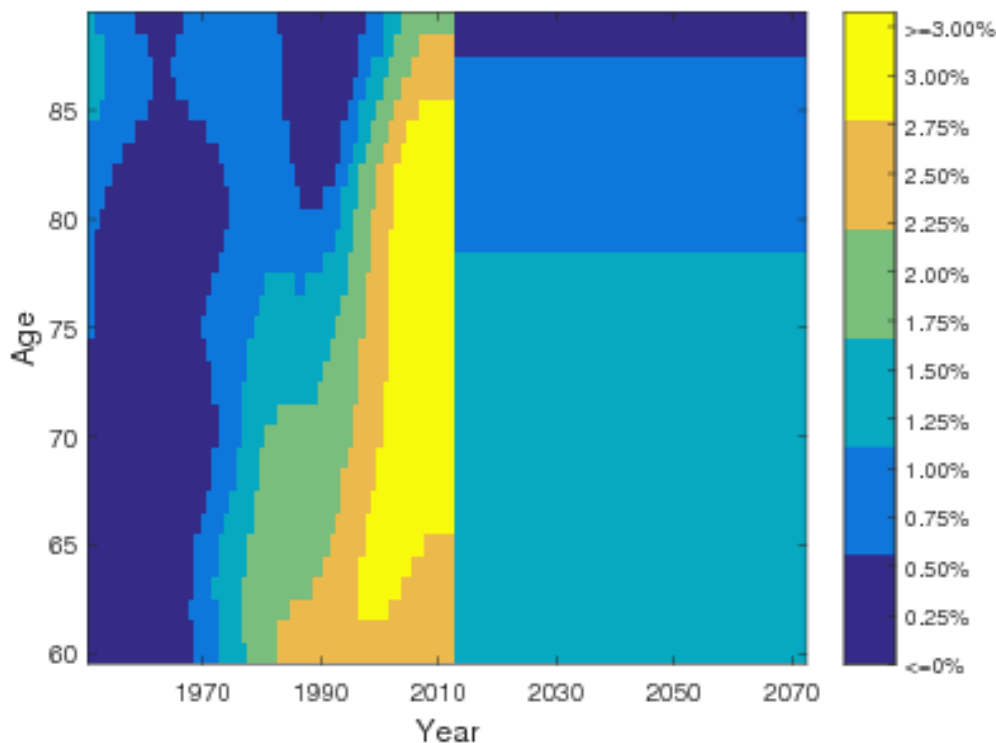
Groupe d'âge	Échelle AA	Réduction réelle (1996 à 2005)
Hommes		
-64	1,48 %	2,71 %
-69	1,36 %	2,89 %
-74	1,50 %	2,84 %
-79	1,28 %	2,71 %
Femmes		
-64	0,50 %	1,77 %
-69	0,50 %	1,70 %
-74	0,62 %	1,69 %
-79	0,74 %	1,81 %

Un autre problème important de l'échelle AA est qu'elle n'assure pas une continuation logique avec les taux antérieurs d'amélioration de la mortalité. Ce problème peut être visualisé au graphique 2, qui montre la carte thermique des taux historiques d'amélioration de la mortalité chez les hommes au Canada (la partie gauche) et les taux d'amélioration attendus correspondants qui découlent implicitement de l'échelle AA (la partie droite). La carte thermique peut être interprétée comme suit :

- Chaque ligne représente les taux d'amélioration de la mortalité à un âge particulier. La variation des couleurs le long de la dimension verticale représente donc l'effet d'âge de l'amélioration de la mortalité.
- Chaque colonne représente les taux d'amélioration de la mortalité pour une année civile donnée. La variation des couleurs le long de la dimension horizontale représente donc l'effet de période (temporel) de l'amélioration de la mortalité.
- Chaque diagonale (du coin inférieur gauche au coin supérieur droit) représente les taux d'amélioration de la mortalité pour une année de naissance donnée. Par conséquent, la variation des couleurs entre les diagonales représente l'effet de cohorte (lié à l'année de naissance) de l'amélioration de la mortalité.

Les effets d'âge, de période et de cohorte sont clairement observés dans les taux historiques d'amélioration de la mortalité. Toutefois, l'échelle AA ne tient compte que de l'effet d'âge, car elle suppose simplement que les taux d'amélioration de la mortalité future sont constants au fil du temps. Pour cette même raison, le passage du passé au futur de la carte thermique n'est pas du tout logique.

Graphique 2 : Carte thermique des taux historiques d'amélioration de la mortalité des hommes au Canada (jusqu'en 2011) et des taux d'amélioration de la mortalité des hommes découlant implicitement de l'échelle AA (après 2011)



**Disponible en anglais seulement.*

Ces dernières années, la profession actuarielle en Amérique du Nord a reconnu les lacunes de l'échelle AA et a commencé à étudier les échelles bidimensionnelles d'amélioration de la mortalité, dont les facteurs d'échelle varient avec l'âge et le temps plutôt qu'avec l'âge seulement. De façon générale, une échelle bidimensionnelle comporte les trois composantes suivantes :

1. Une échelle à court terme pour l'avenir proche : Les facteurs d'échelle sont généralement élevés, pour tenir compte de l'amélioration rapide de la mortalité observée au cours des dernières décennies.
2. Une échelle à long terme pour l'avenir lointain : Comparativement à ceux de l'échelle à court terme, les facteurs d'échelle à long terme (ultimes) sont beaucoup moins élevés, du fait de la conviction que l'amélioration rapide de la mortalité ne durera pas toujours.
3. Une échelle à moyen terme pour la phase de transition : Les facteurs d'échelle sont ici obtenus par interpolation entre les facteurs des échelles à court et à long termes.

Au Canada, le Bureau de l'actuaire en chef (2014) a créé une échelle bidimensionnelle d'amélioration de la mortalité aux fins des évaluations actuarielles du Régime de pensions du Canada et du programme national de Sécurité de la vieillesse (SV). L'Institut canadien des actuaires (ICA) a lui aussi déployé des efforts considérables pour construire des échelles d'amélioration de la mortalité. En 2009, sa Commission sur les résultats de mortalité des retraités canadiens a commandité un projet de recherche, dont le résultat est une échelle bidimensionnelle d'amélioration créée avec les données du Régime de pensions du Canada et du Régime de rentes du Québec, ainsi qu'une série d'hypothèses (Adam, 2012). Puis, en 2014, l'ICA (2014) a lancé l'échelle CPM-B, une échelle bidimensionnelle créée pour les évaluations actuarielles d'un large éventail de régimes de retraite au Canada. En avril 2017, l'ICA (2017) a publié l'échelle MI-2017, qui est une révision de l'échelle CPM-B à partir de données de mortalité plus récentes. Plus tard dans l'année, le Conseil des normes actuarielles a proposé la promulgation de MI-2017 pour l'évaluation des contrats d'assurance au Canada. À titre d'information, nous passons en revue l'échelle MI-2017 à la section 2.

Aux États-Unis, la question des échelles bidimensionnelles d'amélioration a été étudiée pour la première fois en 2012 par le Retirement Plans Experience Committee (RPEC) de la SOA, qui a produit l'échelle BB pour remplacer l'échelle AA déjà périmée (SOA, 2012). En 2014, le RPEC a créé une autre échelle bidimensionnelle, connue sous le nom de MP-2014 (SOA, 2014), qui s'applique à un large éventail de programmes de retraite aux États-Unis. L'échelle MP-2014 a par la suite été révisée en 2015, 2016 et 2017. Les échelles actualisées sont respectivement appelées MP-2015, MP-2016 et MP-2017 (SOA, 2015, 2016 et 2017). À titre d'information, nous passons en revue l'échelle MP-2017 à la section 2.

Bien que le passage d'une à deux dimensions représente une percée importante, les échelles bidimensionnelles d'amélioration de la mortalité existantes comportent encore plusieurs limites importantes.

Premièrement, elles ne produisent que la meilleure estimation de la mortalité future, sans mesurer l'incertitude entourant la meilleure estimation. Faut de mesurer l'incertitude, les échelles n'aident pas les utilisateurs à établir des marges pour écarts défavorables (MED). Pour la même raison, les échelles ne fournissent pas assez d'information permettant d'évaluer le risque de longévité sous-jacent et de trouver des solutions de gestion des risques (p. ex., des swaps de longévité).

Deuxièmement, la production des échelles bidimensionnelles existantes ne peut être considérée comme une science exacte. Plus précisément, les facteurs d'échelle à long terme de ces échelles reposent sur le jugement d'experts ou sur des hypothèses de mortalité à long terme utilisées dans d'autres pays. Des justifications statistiques des facteurs d'échelle à long terme hypothétiques n'ont pas encore été cherchées. De même, les durées des phases de transition dans les échelles bidimensionnelles actuelles ont été déterminées de façon subjective. Vu que les résultats d'évaluation sont habituellement sensibles à l'hypothèse de durée de la phase de transition, il y a lieu de se demander si cet important paramètre peut être estimé de façon plus rigoureuse.

Compte tenu des lacunes susmentionnées, la présente étude se propose de construire un modèle stochastique de mortalité qui nous permettra de produire des échelles bidimensionnelles d'amélioration de la mortalité qui 1) s'inscrivent dans l'esprit des échelles bidimensionnelles existantes, en ce sens que les facteurs d'échelle à court, à moyen et à long termes seront différents, 2) font moins intervenir la subjectivité, 3) comportent des mesures d'incertitude et 4) sont faciles à mettre en œuvre au moyen de tableurs et de logiciels actuariels. À cette fin, nous proposons le modèle « d'onde thermique », qui comporte les composantes suivantes :

- i. Améliorations de fond : À l'instar du concept de rayonnement de fond en physique, les améliorations à long terme de la mortalité sont considérées comme des améliorations de fond qui existent toujours. Elles sont modélisées par des structures paramétriques usuelles et des séries chronologiques telles que le modèle ARIMA.
- ii. Ondes thermiques : Conformément à la conjecture qui sous-tend les échelles bidimensionnelles existantes, les récentes améliorations rapides de la mortalité sont considérées comme des « ondes thermiques » qui sont censées diminuer avec le temps. Elles sont modélisées par des méthodes semblables aux ondelettes et aux séries de Fourier dans l'analyse des séries chronologiques. Cette composante détermine également la vitesse à laquelle les taux d'amélioration de la mortalité convergent vers leurs valeurs à long terme.

La distinction entre les améliorations de fond et les ondes thermiques fait en sorte que le modèle que nous proposons se démarque des modèles stochastiques types dans lesquels l'évolution de la mortalité repose entièrement sur une ou plusieurs séries chronologiques. Étant donné que le modèle proposé comporte des paramètres bornés, les estimations du maximum de vraisemblance ne sont pas faciles à obtenir. Pour surmonter cette difficulté technique, nous utilisons la méthode de barrière pour l'optimisation sous contraintes (Nocedal et Wright, 1999). De façon empirique, les modèles d'onde thermique estimés produisent des facteurs d'échelle qui prolongent logiquement les tendances des taux historiques d'amélioration de la mortalité.

À notre connaissance, le modèle d'onde thermique est la seule méthode qui remplit les quatre critères. Le modèle de Lee-Carter (Lee et Carter, 1992) et le modèle de Cairns-Blake-Dowd (Cairns et coll., 2006) produisent des facteurs d'échelle qui ne varient pas avec le temps (c.-à-d. à une dimension). Les généralisations par cohorte de ces modèles (Cairns et coll., 2009) produisent des facteurs d'échelle de rendement qui varient avec l'âge et le temps, mais, comme nous le verrons plus loin, la variation n'est pas raisonnable. La méthode envisagée récemment par le Continuous Mortality Investigation Bureau (2017a, 2017b) de l'Institute and Faculty of Actuaries (IFoA) du Royaume-Uni est un peu plus axée que les autres sur les modèles et les données, mais elle ne comporte toujours pas de mesure de l'incertitude. La méthode suggérée par Cairns (2017) comporte des mesures de l'incertitude, mais elle n'est pas tout à fait rigoureuse sur le plan statistique, car elle comporte une correction subjective des dérives des séries chronologiques sous-jacentes.

Nous avons appliqué la méthode proposée aux données du Canada et des États-Unis, pour les deux sexes. Toutefois, par souci d'espace, nous ne faisons rapport que des résultats obtenus à l'aide des données relatives aux hommes canadiens. Toutes les données requises (nombre de décès et expositions) proviennent de la base de données sur la longévité canadienne (Human Mortality Database).

Le reste de ce document est structuré comme suit. La section 2 passe brièvement en revue les échelles d'amélioration de la mortalité bidimensionnelles actuellement en usage au Canada et aux États-Unis. La section 3 présente le modèle d'onde thermique et traite des intuitions démographiques qui sous-tendent le modèle. La section 4 décrit la procédure d'estimation et présente les résultats de l'estimation. La section 5 compare le modèle d'onde thermique avec plusieurs modèles stochastiques de mortalité bien connus. La section 6 explique la façon d'établir des mesures de l'incertitude. Enfin, la section 7 conclut le document.

2. Revue de MI-2017 et de MP-2017

La MI-2017 de l'ICA et la MP-2017 de la SOA sont construites selon les mêmes principes et comportent toutes deux une échelle à court terme pour projeter la mortalité dans un avenir proche, une échelle à long terme pour projeter la mortalité dans un avenir éloigné et une échelle à moyen terme pour projeter la mortalité dans la phase de transition. Nous décrivons maintenant comment les trois composantes de MI-2017 et MP-2017 ont été obtenues.

2.1 MI-2017

Selon l'ICA (2017), les composantes à court, à moyen et à long terme de MI-2017 sont construites comme suit :

- *Court terme*

Dans la MI-2017, les taux à court terme sont égaux aux taux d'amélioration de la mortalité qui découlent d'une graduation bidimensionnelle de Whittaker-Henderson appliquée aux données de 1970 à 2015. Les données proviennent de la base de données sur la longévité canadienne (1970-2011) et du Programme canadien de la SV (2012-2015).

Les taux à court terme à 105 ans et plus sont fixés à zéro. Pour les âges de 96 à 104 ans, les taux à court terme sont calculés par interpolation linéaire entre les taux d'amélioration (obtenus de la graduation de Whittaker-Henderson) des âges de 95 ans et de 105 ans.

Les taux à court terme s'appliquent jusqu'en 2013, après quoi l'échelle à moyen terme s'applique. Le décalage de deux ans (2013 au lieu de 2015) est attribuable à un effet de bordure indésirable qui aurait pu se produire au moment de la graduation.

- *Long terme*

Dans la MI-2017, les taux à long terme ont été obtenus en dégageant une tendance à partir des observations passées et en tenant compte de divers avis d'experts du domaine. Le taux d'amélioration à long terme pour tous les âges jusqu'à 90 ans inclus est fixé à 1,0 % par année. Cette valeur est projetée linéairement pour atteindre 0,2 %

par année à l'âge de 100 ans, puis projetée linéairement pour atteindre 0 % à l'âge de 105 ans. Le taux à long terme après 105 ans est fixé à 0 %.

- *Moyen terme*

Dans la MI-2017, les phases de transition pour différents groupes d'âge sont différentes. Pour les âges de 0 à 40 ans, l'échelle à moyen terme s'applique de 2014 à 2023 (10 ans). Pour les 60 ans et plus, l'échelle à moyen terme s'applique aux années 2014 à 2033 (20 ans). Pour les âges de 41 à 59 ans, les durées des phases de transition sont obtenues par interpolation linéaire.

Les taux à moyen terme sont déterminés par des polynômes cubiques, un pour chaque âge. Les quatre paramètres de chaque polynôme cubique sont calculés en utilisant les taux d'amélioration correspondants aux points de départ et de fin de la phase de transition, en fixant la pente du polynôme à zéro à la fin de la phase de transition et en choisissant pour pente du polynôme la pente des taux à court terme correspondants entre 2012 et 2013 (sous réserve d'une valeur absolue maximale de 0,003).

2.2 MP-2017

Selon la SOA (2017), les composantes à court, à long et à moyen termes de MP-2017 sont construites comme suit :

- *Court terme*

Dans la MP-2017, les taux à court terme sont obtenus en appliquant une graduation bidimensionnelle de Whittaker-Henderson aux données de la période de 1951 à 2015. Les taux à court terme s'appliquent aux projections jusqu'en 2013. Le décalage de deux ans par rapport à 2015 vise, ici encore, à atténuer la possibilité d'une sensibilité accrue autour des frontières des données graduées.

- *Long terme*

Dans la MP-2017, le taux à long terme est fixé à 1,0 % par année pour tous les âges jusqu'à 85 ans inclus. Le taux à long terme suit une tendance linéaire, pour s'établir à 0,85 % par année à 95 ans, puis à 0 % à 115 ans. Le choix du taux à long terme de 1,0 % est demeuré inchangé depuis que l'échelle MP-20xx a été publiée pour la première fois en 2014. Selon la SOA (2014), ce choix repose sur les moyennes à long terme des taux historiques d'amélioration de la mortalité de la population américaine, sur l'hypothèse de coût intermédiaire de la Social Security Administration (SSA) aux É.-U. et sur des avis d'experts.

- *Moyen terme*

Dans la MP-2017, les taux à moyen terme proviennent d'une méthode d'« interpolation cubique double » qui combine les taux à court et à long termes. Chaque taux à moyen terme correspond à la moyenne arithmétique des valeurs obtenues de deux interpolations cubiques distinctes. La première interpolation, qui s'étend sur 10 ans, est effectuée suivant une trajectoire d'âge fixe. La seconde interpolation, qui s'étend sur 20

ans, est effectuée suivant une trajectoire d'année de naissance fixe. Le lecteur est invité à consulter la SOA (2014) pour obtenir des détails sur la calibration des polynômes cubiques.

3. Le modèle d'onde thermique

3.1 Définition

Soit $m_{x,t}$ le taux central de mortalité sous-jacent à l'âge x et pour l'année civile t . Nous supposons que l'ensemble de données à l'étude s'étale sur l'intervalle d'âge $[x_0, x_1]$ et nous étudions la période $[t_0, t_1]$. Le modèle d'onde thermique se définit comme suit :

$$\ln(m_{x,t}) = a_x + b_x k_t + c_x \sum_{j=t_0}^t f(x, t; \vec{\theta}), \quad (1)$$

où a_x , b_x et c_x sont des paramètres spécifiques à l'âge, k_t est un paramètre variable dans le temps et f est fonction de l'âge et du temps avec un vecteur de paramètres $\vec{\theta}$.

Dans l'équation (1), $a_x + b_x k_t$ est la structure de base de Lee-Carter, qui, dans notre modèle, représente l'amélioration de fond de la mortalité. Comme dans le modèle original de Lee-Carter, l'évolution de k_t est représentée par une marche aléatoire avec dérive :

$$k_t = d + k_{t-1} + \varepsilon_t, \quad (2)$$

où d est le terme de dérive et $\{\varepsilon_t\}$ est une suite de variables aléatoires normales indépendantes et identiquement distribuées ayant une moyenne de zéro et une variance constante. Nous utilisons aussi les contraintes originales d'identifiabilité de Lee-Carter, $\sum_{x=x_0}^{x_1} b_x = 1$ et $\sum_{t=t_0}^{t_1} k_t = 0$, pour assurer l'unicité des paramètres.

D'autre part, $f(x, t; \vec{\theta})$ représente l'onde thermique. Nous posons cette fonction égale à la fonction de densité de probabilité d'une distribution normale :

$$f(x, t; \vec{\theta}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{((t-t_0) - (\mu + (x-x_0)h))^2}{2\sigma^2}\right), \quad (3)$$

où $\vec{\theta} = (\mu, \sigma, h)'$ est le vecteur des paramètres de l'onde thermique qui déterminent la position, l'amplitude et la forme de l'onde thermique. Bien que d'autres fonctions paramétriques puissent être utilisées, nous avons choisi cette fonction particulière, car elle nous permet de produire des taux d'amélioration qui sont faciles à interpréter.

Pour simplifier la notation, nous posons

$$g(x, t; \vec{\theta}) = \sum_{j=t_0}^t f(x, t; \vec{\theta}),$$

qui désigne l'effet cumulatif de l'onde thermique jusqu'à l'instant $t > t_0$. En termes de $g(x, t; \vec{\theta})$, le modèle d'onde thermique peut être réexprimé ainsi de manière plus concise :

$$\ln(m_{x,t}) = a_x + b_x k_t + c_x g(x, t; \vec{\theta}). \quad (4)$$

3.2 Taux implicites d'amélioration de la mortalité

L'interprétation du modèle d'onde thermique s'éclaircit lorsque nous examinons l'amélioration espérée de mortalité qui découle du modèle. Si nous annulons le terme aléatoire dans l'équation (2), la variation du logarithme du taux central de mortalité à l'âge x de l'année $t - 1$ à l'année t est donnée par

$$\ln(m_{x,t}) - \ln(m_{x,t-1}) = b_x d + c_x f(x, t; \vec{\theta}) \quad (5)$$

$$= b_x d + c_x \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{((t-t_0)-(\mu+(x-x_0)h))^2}{2\sigma^2}\right), \quad (6)$$

pour $t = t_1 + 1, t_1 + 2, \dots$

Il est clair que le premier terme ($b_x d$) ci-dessus représente l'amélioration de fond à long terme, qui, par définition, dépend de l'âge (x), mais non du temps (t). Nous supposons que les taux d'amélioration à long terme pour tous les âges sont de même signe. Pour cette raison, nous exigeons que $b_x > 0$ pour tout $x = x_0, \dots, x_1$ ⁵. Avec cette contrainte, nous anticipons que k_t a une pente descendante, ce qui veut dire que d a une valeur négative.

L'autre terme correspond à l'onde thermique, qui diminue asymptotiquement vers zéro à mesure que t tend vers l'infini. Le paramètre c_x permet que l'impact de l'onde thermique soit dépendant de l'âge. Dans le cas extrême où $c_x = 0$, l'amélioration de la mortalité à l'âge x n'est pas du tout touchée par l'onde thermique. Puisque $f(x, t; \vec{\theta})$ est non négative, nous exigeons que $c_x < 0$ pour tout $x = x_0, \dots, x_1$ afin que l'onde thermique absorbe l'amélioration excédentaire de mortalité (au lieu de la détérioration). Les trois paramètres (μ, σ, h) des ondes thermiques sont facilement interprétables.

Premièrement, σ définit la vitesse à laquelle l'onde thermique décroît. Puisque la densité normale est assez proche de zéro (0,054) à deux écarts-types au-dessus de la moyenne, nous pouvons considérer $2 \times \sigma$ comme étant le temps approximatif pendant lequel les taux d'amélioration convergent de leurs valeurs maximales à leurs valeurs à long terme, soit la période de convergence. Bien entendu, σ doit être strictement positif. De plus, puisque la période de convergence ne peut être ni trop courte (disons, moins de huit ans) ni trop longue (disons, plus de 60 ans), nous exigeons aussi que $4 < \sigma < 30$.

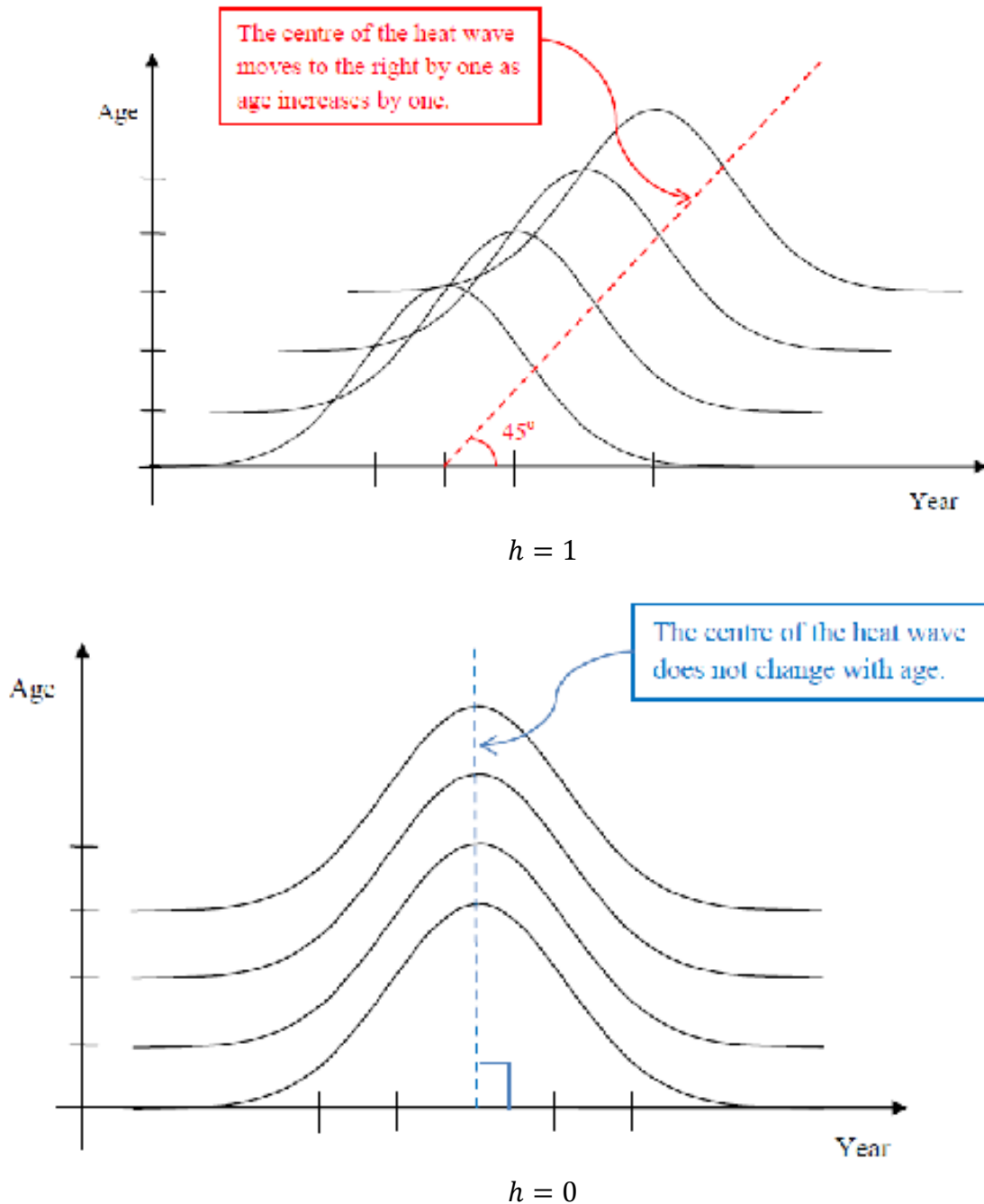
Deuxièmement, μ détermine la position de l'onde thermique. Pour l'âge x_0 (l'âge le plus bas de l'intervalle à l'étude), le pic de mortalité a lieu dans l'année $t_0 + \mu$. Compte tenu des tendances dans les cartes thermiques typiques de mortalité, ce pic devrait être observé dans la période à l'étude de l'ensemble de données, et pour cette raison, nous exigeons que $1 < \mu < t_1 - t_0$. De façon plus générale, pour $x = x_0, \dots, x_1$, le pic de l'onde thermique a lieu dans l'année $t_0 + \mu + (x - x_0)h$.

Enfin, h représente le mélange entre les effets de période et de cohorte dans l'onde thermique. La signification de h est illustrée dans le graphique 3. Dans un cas extrême où $h = 1$, le centre de l'onde thermique augmente d'un an lorsque l'âge augmente d'un an. Par conséquent, les ondes thermiques s'alignent diagonalement à la perfection, ce qui laisse penser

⁵ Nous ne pouvons pas exiger que $b_x < 0$ pour tout $x = x_0, \dots, x_1$, en raison de l'utilisation de la contrainte d'identifiabilité $\sum_{x=x_0}^{x_1} b_x = 1$.

que l'amélioration excédentaire de mortalité par rapport aux taux de fond est due entièrement aux effets de cohorte. Dans l'autre cas extrême où $h = 0$, le centre de l'onde thermique ne change pas en fonction de l'âge. En conséquence, les ondes thermiques s'alignent verticalement à la perfection, ce qui indique que l'amélioration de mortalité excédentaire par rapport aux taux de fond est le résultat des seuls effets de période.

Graphique 3 : Formes des ondes thermiques lorsque $h = 1$ (graphique supérieur) et $h = 0$ (graphique inférieur)



**Disponibles en anglais seulement.*

En pratique, au lieu d'être exprimés en variations absolues du logarithme des taux de mortalité, les facteurs d'échelle sont exprimés en variations relatives (pourcentage) des taux de mortalité; c'est-à-dire que,

$$R(x, t) = 1 - \frac{m_{x,t}}{m_{x,t-1}},$$

$t = t_1 + 1, t_1 + 2, \dots$, où $R(x, t)$ désigne le facteur d'échelle d'amélioration de la mortalité pour l'âge x et l'année civile t . Il découle de l'équation (6) que

$$R(x, t) = 1 - \exp\left(b_x d + c_x \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{((t-t_0) - (\mu + (x-x_0)h))^2}{2\sigma^2}\right)\right), \quad (7)$$

$t = t_1 + 1, t_1 + 2, \dots$, pour le modèle d'onde thermique lorsque les innovations aléatoires dans l'équation (2) sont annulées. Cette fonction peut être intégrée aisément à des tableurs et à des logiciels actuariels.

4. Estimation

4.1 La méthode d'estimation

Nous allons maintenant expliquer comment estimer le modèle d'onde thermique.

Premièrement, nous cherchons une fonction de vraisemblance pour estimer les paramètres de l'équation (1). Cette fonction repose sur l'hypothèse que le nombre de décès suit une loi de Poisson. Soit $D_{x,t}$ le nombre observé de décès à l'âge x et dans l'année t , et $E_{x,t}$ le nombre correspondant d'expositions⁶. La fonction de vraisemblance l est obtenue en supposant que $D_{x,t}$ est une réalisation d'une distribution de Poisson avec une moyenne de $E_{x,t}m_{x,t}$, où $m_{x,t}$ obéit à la spécification de l'équation (1).

Deuxièmement, nous utilisons la méthode de barrière pour introduire les contraintes d'inégalité :

$$b_x > 0 \text{ et } c_x < 0, \quad x = x_0, \dots, x_1.$$

Plus précisément, nous retranchons les fonctions des paramètres b_x et c_x de la fonction de vraisemblance originale l , formant ainsi une fonction objective $l^{(B)}$ qui est maximisée pour obtenir les estimations des paramètres du modèle. Chaque fonction barrière est créée de manière à tendre vers l'infini positif à mesure que le paramètre qui lui est associé approche sa limite, ce qui empêche l'estimation du paramètre qui en résulte de dépasser la limite.

Troisièmement, nous choisissons les valeurs initiales du processus d'optimisation (maximisation), c'est-à-dire que nous choisissons les valeurs initiales de μ , h et σ en tenant compte des tendances des améliorations historiques de la mortalité. Les valeurs initiales des autres paramètres (c_x , a_x , b_x et k_t) s'obtiennent en calculant une estimation (partielle) du maximum de vraisemblance qui est conditionnelle aux valeurs initiales de μ , h et σ choisies. De bonnes valeurs initiales peuvent stabiliser et accélérer le processus d'optimisation.

⁶ La valeur observée de $m_{x,t}$ est le ratio de $D_{x,t}$ sur $E_{x,t}$.

Quatrièmement, nous maximisons la fonction objectif $l^{(B)}$ au moyen de la méthode itérative de Newton, selon laquelle les paramètres sont révisés un à la fois. À la fin de chaque itération, soit lorsque tous les paramètres de l'équation (1) sont révisés, les estimations b_x et k_t font l'objet d'un changement d'échelle afin que leur somme totalise respectivement 1 et 0⁷. Les itérations cessent lorsque la variation de $l^{(B)}$ est inférieure à un niveau de tolérance prédéfini, disons 10^{-6} .

Pour finir, sachant les estimations de k_{t_0}, \dots, k_{t_1} , le terme de dérive d dans l'équation (2) peut être estimé facilement. Selon la méthode des moindres carrés conditionnels, la meilleure estimation de d est simplement $(k_{t_1} - k_{t_0}) / (t_1 - t_0 - 1)$.

4.2 Résultats d'estimation

4.2.1 Estimation des paramètres

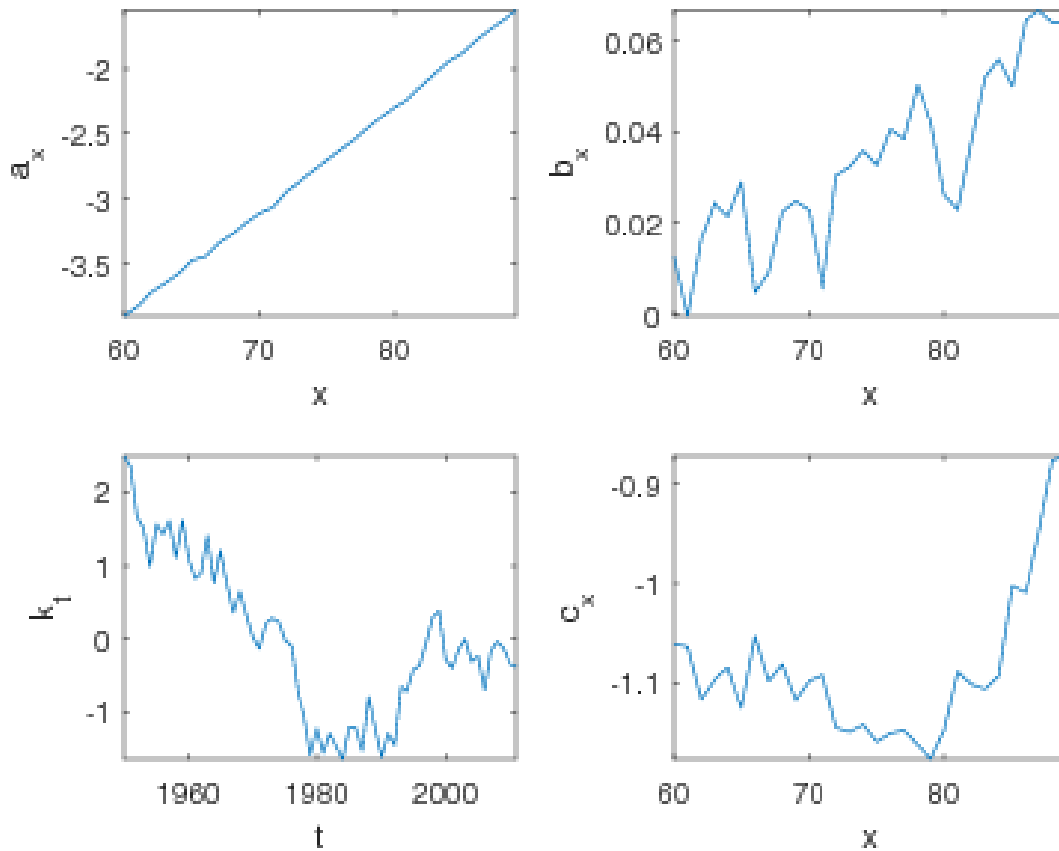
Nous estimons le modèle d'onde thermique avec les données de la population masculine sur la période à l'étude $[t_0, t_1] = [1950, 2011]$ et l'intervalle d'âge à l'étude $[x_0, x_1] = [60, 89]$.

Les estimations de μ , σ et h sont respectivement égales à 44,5238, 14,4002 et 0,7549. L'estimation de h indique que l'onde thermique (soit l'amélioration rapide de la mortalité observée ces deux dernières décennies) découle des effets de cohorte et de période, l'effet de cohorte étant le plus important (75 % contre 25 %). L'estimation de σ semble indiquer que la période de convergence (période pendant laquelle les taux d'amélioration convergent de leurs valeurs maximales à leurs valeurs à long terme) est d'environ $2 \times 14,4002 \approx 29$ années.

Les estimations des paramètres autres que ceux des ondes thermiques sont illustrées dans le graphique 4. À l'exemple du modèle original de Lee-Carter, l'estimation de a_x augmente assez linéairement avec l'âge. Les estimations de c_x sur l'intervalle d'âge à l'étude laissent penser que l'amélioration de la mortalité aux jeunes âges a tendance à être plus sensible à l'onde thermique. Sur la base des valeurs estimées de k_{t_0}, \dots, k_{t_1} , l'estimation du terme de dérive d dans l'équation (2) est de $-0,0471$.

⁷ Cette étape est nécessaire, car nous utilisons les contraintes d'identifiabilité originales de Lee-Carter ($\sum_{x=x_0}^{x_1} b_x = 1$ et $\sum_{t=t_0}^{t_1} k_t = 0$) pour stipuler l'unicité des paramètres.

Graphique 4 : Estimations de a_x , b_x , c_x et k_t pour $x = 60, \dots, 89$ et $t = 1950, \dots, 2011$.



**Disponible en anglais seulement.*

4.2.2 Qualité d'ajustement

Nous analysons maintenant la qualité d'ajustement du modèle d'onde thermique. Puisque ce modèle est inspiré du modèle original de Lee-Carter, nous utilisons ce dernier dans notre analyse à titre de référence.

Les valeurs logarithmiques de vraisemblance maximisées du modèle d'onde thermique et du modèle original de Lee-Carter sont respectivement de $-10\,243,4$ et $-11\,386,0$. La différence dans ces valeurs laisse croire que le modèle d'onde thermique produit un meilleur ajustement aux données historiques.

Puisque le modèle d'onde thermique contient plus de paramètres que le modèle original de Lee-Carter, nous comparons également les deux modèles en fonction du critère d'information bayésien (BIC; Schwarz, 1978), qui se définit ainsi :

$$\text{BIC} = \hat{l} - 0,5 \times n_p \times n_d, \quad (8)$$

où \hat{l} désigne le logarithme de vraisemblance maximisé, n_p représente le nombre de paramètres du modèle et $n_d = (x_1 - x_0 + 1) \times (t_1 - t_0 + 1)$ est le nombre de points de données utilisés. Le BIC prévoit une pénalité pour l'utilisation de paramètres : plus le nombre

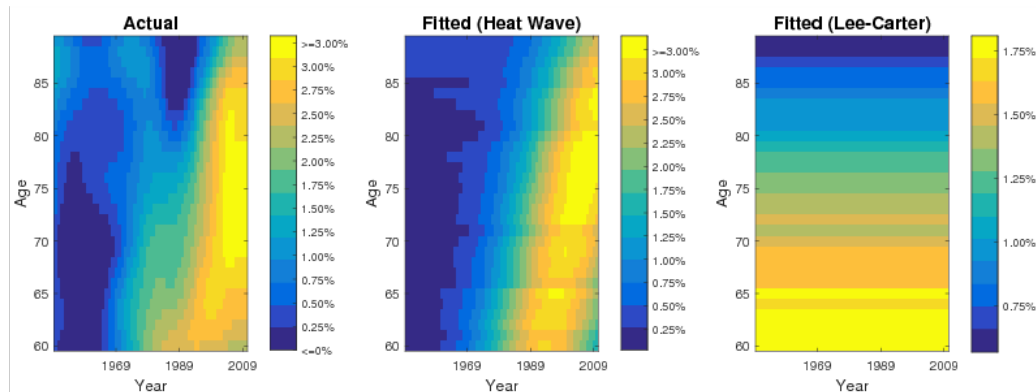
de paramètres du modèle est élevé, plus grande est la pénalité. Compte tenu de la façon dont le BIC est défini, le modèle ayant la plus grande valeur du BIC sera préféré. Les valeurs du BIC du modèle d'onde thermique et du modèle original de Lee-Carter sont respectivement de $-10\,819,3$ et $-11\,837,8$. Ces valeurs semblent indiquer que le modèle d'onde thermique surpasse le modèle original de Lee-Carter même lorsque nous tenons compte de l'utilisation de paramètres additionnels.

Dans le graphique 5, nous comparons les taux réels d'amélioration de la mortalité sur la période à l'étude avec les taux ajustés d'amélioration de la mortalité obtenus par le modèle d'onde thermique et le modèle original de Lee-Carter. Pour le modèle d'onde thermique, les taux ajustés sont calculés au moyen de l'équation (7) et des paramètres estimés du modèle. Pour le modèle original de Lee-Carter, les taux ajustés sont calculés au moyen de la formule suivante et des paramètres estimés du modèle :

$$R(x, t) = 1 - \exp(b_x d). \tag{9}$$

Nous pouvons constater que, comparativement au modèle original de Lee-Carter, le modèle d'onde thermique reproduit avec beaucoup plus de précision la configuration complexe des taux historiques d'amélioration de la mortalité.

Graphique 5 : Taux réels d'amélioration de la mortalité (à gauche), taux ajustés d'amélioration de la mortalité obtenus par le modèle d'onde thermique (au centre) et modèle original de Lee-Carter (à droite) sur la période à l'étude (1950-2011).



**Disponible en anglais seulement.*

4.2.3 Projections de la mortalité

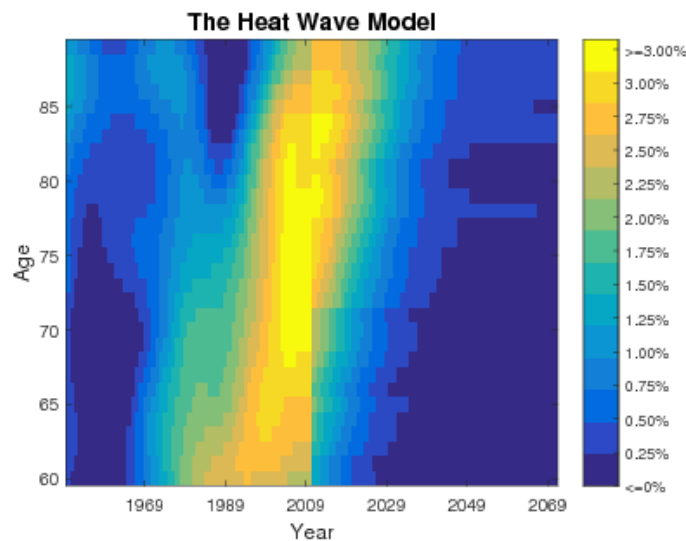
Passons maintenant aux projections de mortalité. Les deux premiers tableaux du graphique 6 présentent les cartes thermiques des taux espérés d'amélioration future de la mortalité qui découlent respectivement du modèle d'onde thermique et du modèle original de Lee-Carter⁸. Pour faciliter les analyses, les taux d'amélioration historiques sont également inclus dans les cartes thermiques.

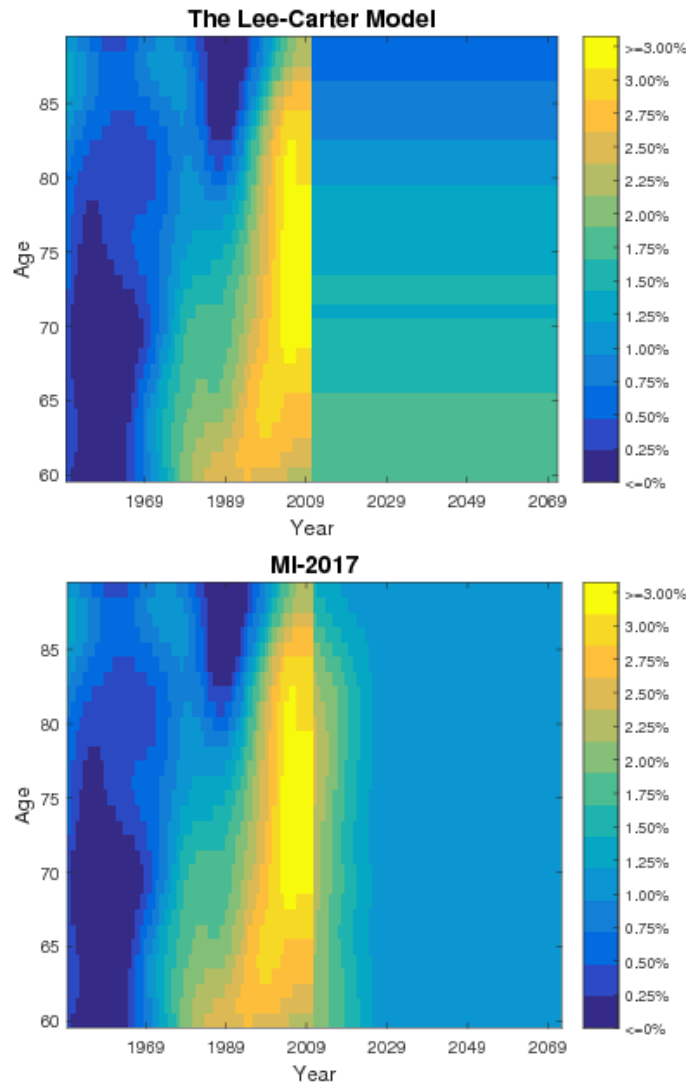
⁸ Pour simplifier l'exposé, les taux historiques d'amélioration de la mortalité indiqués dans les diagrammes ont été lissés au préalable. Il est important de noter que le modèle d'onde thermique et le modèle de Lee-Carter sont calibrés en fonction des données brutes plutôt que des données déjà lissées.

La configuration des taux espérés d'amélioration future de la mortalité obtenus par le modèle d'onde thermique semble être la suite logique de celle des taux historiques d'amélioration de la mortalité. Les caractéristiques, dont les effets de cohorte (la variation des couleurs suivant la dimension diagonale), sont conservées. En revanche, comme l'équation (9) l'implique, le modèle original de Lee-Carter produit une carte thermique projetée qui ne montre aucune variation suivant les dimensions horizontale et verticale. Cette configuration simpliste ne semble pas constituer une suite raisonnable de la configuration de la carte thermique des taux historiques d'amélioration de la mortalité.

Dans le tableau inférieur du graphique 6, nous montrons la carte thermique des taux espérés d'amélioration future de la mortalité indiqués dans la MI-2017. Comparativement au modèle d'onde thermique, la MI-2017 produit des taux d'amélioration moins prudents à court terme (les couleurs chaudes observées dans la carte thermique des taux historiques ne se trouvent pas dans la carte thermique produite par la MI-2017), mais le contraire est vrai à long terme. Dans les cartes thermiques du rapport de l'ICA paru en 2017, nous observons une transition plus naturelle entre les taux d'amélioration historiques et les taux d'amélioration projetés de la MI-2017. Cette différence peut s'expliquer par le fait que les taux d'amélioration lissés dans ces cartes thermiques sont obtenus par une méthode différente (graduation de Whitaker-Henderson).

Graphique 6 : Cartes thermiques des taux espérés d'amélioration de la mortalité (année 2012 et les suivantes) qui découlent du modèle d'onde thermique (tableau supérieur), du modèle original de Lee-Carter (tableau intermédiaire) et de la MI-2017 (tableau inférieur). Les taux réels d'amélioration de la mortalité sur la période à l'étude sont également indiqués.

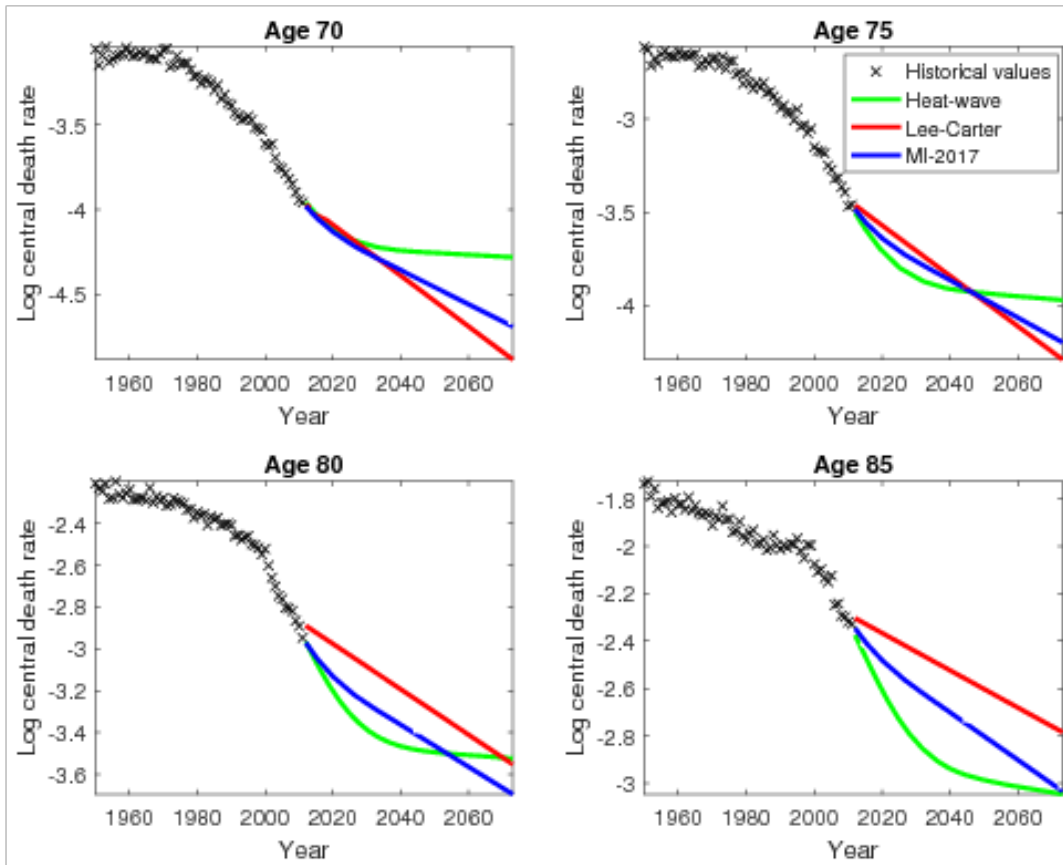




**Disponibles en anglais seulement.*

Le graphique 7 compare les taux centraux de mortalité spécifiques à l'âge projetés par le modèle d'onde thermique, par le modèle original de Lee-Carter et par la MI-2017. Le modèle original de Lee-Carter produit une projection purement linéaire, avec un gradient qui ne correspond pas bien au rythme de réduction observé au cours des deux dernières décennies. Le modèle d'onde thermique et la MI-2017 produisent des projections non linéaires, mais selon différents degrés de prudence. Le modèle d'onde thermique produit une amélioration plus forte de la mortalité à l'extrémité supérieure de l'intervalle d'âge, mais l'inverse est vrai à l'extrémité inférieure. En outre, à (très) long terme, la MI-2017 tend à produire des taux de mortalité projetés inférieurs, car ses facteurs d'échelle ultimes sont généralement plus élevés que les taux d'amélioration à long terme qui découlent du modèle d'onde thermique.

Graphique 7 : Taux centraux de décès spécifiques à l'âge (échelle logarithmique) pour l'année 2012 et les suivantes, projetés par le modèle d'onde thermique, le modèle original de Lee-Carter et la MI-2017.



**Disponible en anglais seulement.*

5. Comparaison avec les modèles de mortalité stochastiques existants

Nous comparons ici le modèle d'onde thermique avec plusieurs autres modèles de mortalité stochastiques que nous trouvons couramment aujourd'hui dans la documentation, à savoir :

- Le modèle original de Cairns-Blake-Dowd, aussi appelé M5 (Cairns et coll., 2006)

$$\ln\left(\frac{q_{x,t}}{1 - q_{x,t}}\right) = k_t^{(1)} + k_t^{(2)}(x - \bar{x})$$

- Le modèle de Cairns-Blake-Dowd avec un effet d'âge quadratique, aussi appelé M6 (Cairns et coll., 2009)

$$\ln\left(\frac{q_{x,t}}{1 - q_{x,t}}\right) = k_t^{(1)} + k_t^{(2)}(x - \bar{x}) + \gamma_c$$

- Le modèle de Cairns-Blake-Dowd avec un effet d'âge quadratique et un effet de cohorte, aussi appelé M7 (Cairns et coll., 2009)

$$\ln\left(\frac{q_{x,t}}{1 - q_{x,t}}\right) = k_t^{(1)} + k_t^{(2)}(x - \bar{x}) + k_t^{(3)}((x - \bar{x})^2 - \hat{\sigma}_x^2) + \gamma_c$$

- Le modèle de Plat (Plat, 2009)

$$\ln(m_{x,t}) = a_x + k_t^{(1)} + k_t^{(2)}(\bar{x} - x) + k_t^{(3)}(\bar{x} - x)_+ + \gamma_c$$

- Le modèle de Plat simplifié (Plat, 2009)

$$\ln(m_{x,t}) = a_x + k_t^{(1)} + k_t^{(2)}(\bar{x} - x) + \gamma_c$$

Dans les formules précédentes, $q_{x,t} \approx 1 - \exp(-m_{x,t})$ représente la probabilité conditionnelle de décès à l'âge x et dans l'année t , a_x est un paramètre spécifique à l'âge, $k_t^{(i)}$, $i = 1, 2, 3$, est un facteur stochastique qui est fonction du temps (t), γ_c est un facteur stochastique qui est fonction de l'année de naissance ($c = t - x$), \bar{x} représente l'âge moyen sur l'intervalle d'âge à l'étude, $\hat{\sigma}_x$ est la moyenne de $(x - \bar{x})^2$ sur l'intervalle d'âge à l'étude, et $(\bar{x} - x)_+$ représente la plus petite valeur entre $(\bar{x} - x)$ et zéro.

Les modèles sont estimés avec les données de la population masculine canadienne au moyen de la méthode du maximum de vraisemblance de Poisson. Les contraintes d'identifiabilité utilisées sont les mêmes que celles utilisées dans les travaux initiaux de Cairns et coll. (2009) et Plat (2009). Nous utilisons une marche aléatoire avec dérive pour modéliser l'évolution de k_t au fil du temps, et un processus ARMA (1,1) pour modéliser l'évolution de γ_c en fonction de l'année de naissance.

Comparons tout d'abord la qualité de l'ajustement des modèles. Le tableau 2 indique la valeur du BIC (défini à l'équation (8)) produite par chacun des modèles estimés. En comparaison des cinq autres modèles, le modèle d'onde thermique produit la valeur du BIC la plus élevée (la moins négative). Ce résultat semble indiquer que le modèle d'onde thermique surpasse non seulement le modèle original de Lee-Carter en termes de qualité d'ajustement, mais aussi les cinq autres modèles stochastiques de mortalité couramment utilisés, en tenant compte du nombre de paramètres.

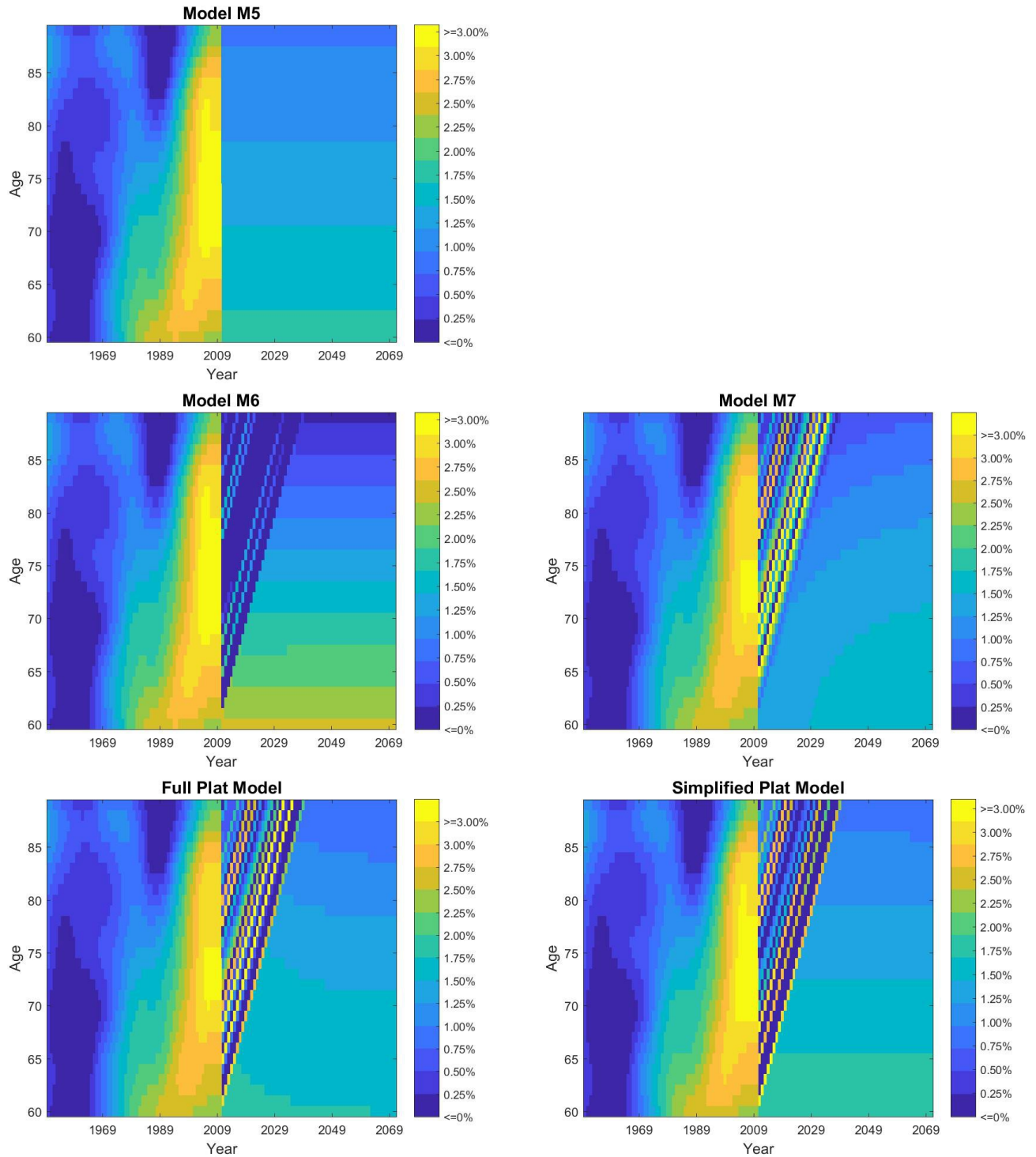
Tableau 2 : Valeurs du BIC produites par le modèle d'onde thermique et cinq autres modèles stochastiques de mortalité ajustés aux données de la population masculine canadienne.

Modèle	BIC
Cairns-Blake-Dowd	-11 899
Cairns-Blake-Dowd avec effet de cohorte	-11 031
Cairns-Blake-Dowd avec effet d'âge quadratique et effet de cohorte	-11 157
Plat	-11 137
Plat simplifié	-10 989
Onde thermique	-10 819

Nous examinons ensuite les taux espérés d'amélioration future de la mortalité qui découlent des cinq autres modèles (graphique 8). Le modèle M5 présente le même problème que le modèle original de Lee-Carter et l'échelle AA : il produit des taux d'amélioration future de la mortalité qui ne sont fonction ni du temps ni de l'année de naissance. Ce problème découle du fait théorique que, selon le modèle M5, la différence (espérée) entre $\ln(q_{x,t}/(1 - q_{x,t}))$ et $\ln(q_{x,t-1}/(1 - q_{x,t-1}))$ ne dépend pas de t .

Les quatre autres modèles, qui intègrent tous les effets de cohorte, produisent des cartes thermiques qui présentent des tendances diagonales. Toutefois, ces tendances ne semblent pas être des suites naturelles des tendances observées dans le passé. Et chose plus importante encore, ces modèles ne s'inscrivent pas dans le cadre d'échelles bidimensionnelles d'amélioration de la mortalité, dans lesquelles les facteurs d'échelle à court terme convergent doucement et graduellement vers les facteurs d'échelle à long terme.

Graphique 8 : Cartes thermiques des taux espérés d'amélioration de la mortalité (année 2012 et les suivantes) qui découlent du modèle M5, du modèle M6, du modèle M7, du modèle de Plat et du modèle de Plat simplifié. Les taux réels d'amélioration de la mortalité sur la période à l'étude sont également indiqués.



**Disponibles en anglais seulement.*

6. Mesures de l'incertitude

Un aspect important du modèle d'onde thermique est qu'il peut produire des mesures de l'incertitude entourant les taux espérés d'amélioration future de la mortalité. L'obtention de ces mesures d'incertitude fait l'objet de la présente section.

Comme l'indique l'équation (5), selon le modèle d'onde thermique, la variation espérée du taux logarithmique central de mortalité à l'âge x entre les années $t - 1$ et t est donnée par

$$v(\vec{\theta}^*) = b_x d + c_x f(x, t; \vec{\theta}^*),$$

qui est fonction d'un vecteur de six paramètres,

$$\vec{\theta}^* = (b_x, c_x, \mu, \sigma, h, d)'$$

Bien entendu, les valeurs réelles de ces six paramètres ne sont jamais connues. Puisque nous ne pouvons évaluer v qu'en utilisant les valeurs estimées des six paramètres du modèle, les taux d'amélioration de la mortalité calculés sont soumis à l'incertitude entourant les estimations des six paramètres.

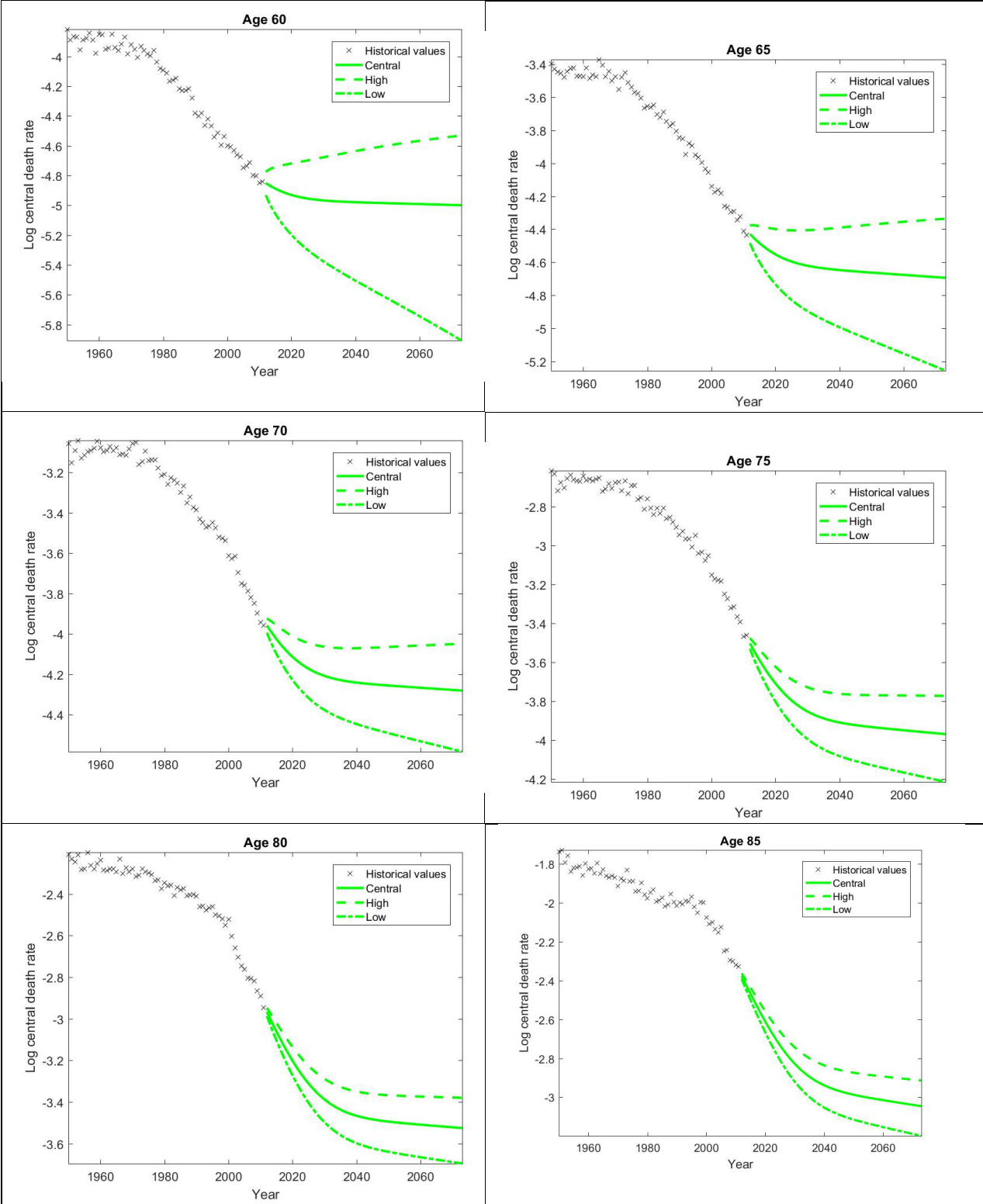
Soit $\hat{\theta}^*$ l'estimation du vecteur des six paramètres. Au moyen de la méthode delta multivariée, la variance de $v(\vec{\theta}^*)$ peut être calculée approximativement comme une fonction de la matrice d'information de $\vec{\theta}^*$ et des dérivées partielles de $v(\vec{\theta}^*)$ par rapport à $\vec{\theta}^*$.

Une estimation haute/basse d'un taux d'amélioration de la mortalité (exprimée en termes de variation des taux logarithmiques centraux de mortalité) peut être calculée comme étant la meilleure estimation du taux d'amélioration de la mortalité plus/moins un multiple (disons, trois) de la racine carrée de la variance correspondante; c'est-à-dire que,

$$v(\hat{\theta}^*) \pm 3\sqrt{\text{Var}(v(\hat{\theta}^*))}.$$

À l'aide de la méthode décrite ci-dessus, nous obtenons des estimations élevées/basses des taux d'amélioration future de la mortalité de la population masculine canadienne selon le modèle d'onde thermique. Dans le graphique 9, nous présentons les trajectoires projetées des taux centraux de mortalité à divers âges, calculées à l'aide des estimations hautes/basses des taux d'amélioration de la mortalité. Le résultat présenté dans le graphique 9 donne une idée de la mesure dans laquelle les taux de décès peuvent être hauts ou bas dans l'avenir et peut également aider à établir des marges pour écarts défavorables.

Graphique 9 : Taux centraux de décès spécifiques à l'âge (échelle logarithmique), année 2012 et les suivantes, projetés à l'aide des estimations centrales, hautes et basses des taux d'amélioration de la mortalité qui découlent du modèle d'onde thermique.



*Disponibles en anglais seulement.

7. Conclusion

Dans ce document, nous avons introduit le modèle d'onde thermique pour modéliser et projeter la mortalité. Ce nouveau modèle repose sur un point de vue particulier selon lequel l'amélioration générale de la mortalité se compose d'« améliorations de fond » et d'« ondes thermiques ». La première composante est prise en compte par une structure simple de Lee-Carter, tandis que la seconde est modélisée par une fonction paramétrique qui présente une certaine similitude avec une série de Fourier.

La construction du modèle d'onde thermique s'inscrit très bien dans le cadre des échelles bidimensionnelles d'amélioration de la mortalité, un cadre de projection de la mortalité qui a récemment été adopté par plusieurs associations actuarielles, dont l'ICA, pour la réalisation d'évaluations actuarielles. Le modèle d'onde thermique produit des facteurs d'échelle qui forment une suite logique des taux historiques d'amélioration de la mortalité, permettant une convergence en douceur des valeurs à court terme supérieures aux valeurs à long terme (ultimes) inférieures. Tel qu'il a été démontré à la section 5, aucun des modèles de mortalité stochastiques existants (y compris le modèle de Lee-Carter, le modèle de Cairns-Blake-Dowd et ses variantes, et deux versions du modèle Plat) étudiés dans le présent document ne peut produire de facteurs d'échelle ayant des propriétés aussi souhaitables.

Le modèle d'onde thermique complète, pour deux aspects importants, les méthodes actuelles de calcul des échelles bidimensionnelles d'amélioration de la mortalité. Premièrement, il repose entièrement sur des données, de sorte qu'on a nettement moins besoin de faire appel à la subjectivité. Estimé avec des données historiques, le paramètre σ indique la durée de la période de convergence, et les paramètres b_x et d déterminent le taux d'amélioration de la mortalité à long terme (ultime) à chaque âge. Deuxièmement, plutôt que de produire seulement une meilleure estimation, le modèle d'onde thermique produit en plus une mesure de l'incertitude entourant la meilleure estimation. Comme l'illustre la section 6, avec le modèle d'onde thermique, nous pouvons obtenir des estimations hautes/basses des facteurs d'échelle, qui peuvent servir en pratique à établir des MED.

D'un point de vue statistique, le modèle d'onde thermique représente aussi une amélioration importante par rapport à bon nombre des modèles stochastiques de mortalité existants. Comparativement à six autres modèles largement utilisés dans la documentation, le modèle d'onde thermique procure un bien meilleur ajustement à l'ensemble de données à l'étude, même si l'on tient compte du nombre de paramètres du modèle. Certes, le modèle d'onde thermique est plus difficile à estimer en raison de ses contraintes d'inégalité rattachées aux paramètres, mais cette difficulté peut être contournée par la méthode de barrière.

Nous soulevons deux limites du modèle d'onde thermique. Premièrement, par rapport au modèle de Lee-Carter, la procédure d'estimation du modèle d'onde thermique est évidemment plus compliquée. Les valeurs initiales doivent être soigneusement choisies pour accélérer la convergence, et des fonctions barrières doivent être spécifiées pour que les contraintes d'inégalité s'appliquent à certains des paramètres. Deuxièmement, étant donné la façon dont le modèle est construit, il est difficile de tester la qualité de ses prévisions, particulièrement sur une longue période prévisionnelle.

Dans le cadre de recherches ultérieures, le modèle d'onde thermique pourrait être amélioré sur certains points. Tout d'abord, il serait intéressant d'examiner si d'autres fonctions que la fonction de densité normale capteraient mieux l'onde thermique et produiraient une qualité d'ajustement plus considérable. Deuxièmement, puisque certains ensembles de données contiennent plus d'une onde thermique, il est justifié d'élargir la version actuelle du modèle pour y inclure plusieurs ondes et d'élaborer une procédure permettant de déterminer le nombre d'ondes à intégrer. Enfin, comme la méthode de barrière n'est pas la seule méthode d'optimisation qui puisse gérer les contraintes d'inégalité, il serait utile d'explorer d'autres méthodes pour maximiser les fonctions logarithmiques de vraisemblance du modèle d'onde thermique et de ses variantes futures.

Remerciements

Les auteurs remercient chaleureusement l'ICA de les avoir appuyés financièrement par l'attribution d'une bourse de recherche en 2016-2017.

Ouvrages de référence

- Adam, L. (2012). « La table de mortalité des retraités canadiens – Tendances historiques de l'amélioration de la mortalité au 31 décembre 2007 ». En ligne : www.cia-ica.ca/docs/default-source/2013/213012f.pdf.
- Bureau de l'actuaire en chef. « Projections de mortalité pour les programmes de sécurité sociale au Canada (étude actuarielle n° 12) », 2014. En ligne : www.osfi-bsif.gc.ca/fra/ocabac/as-ea/Pages/mpsspc.aspx.
- Cairns, A.J.G. « A Flexible and Robust Approach to Modelling Single Population Mortality » (document présenté lors de Longevity 13), Taipei, septembre 2017.
- Cairns, A.J.G., Blake, D. et K. Dowd. « A Two-Factor Model for Stochastic Mortality with Parameter Uncertainty: Theory and Calibration », *Journal of Risk and Insurance*, vol. 73, 2006, p. 687-718.
- Cairns, A.J.G., Blake, D., K. Dowd., Coughlan, G.D., Epstein, D., Ong, A. et I. Balevich. « A Quantitative Comparison of Stochastic Mortality Models Using Data from England and Wales and the United States », *North American Actuarial Journal*, vol. 13, 2009, p. 1-35.
- Continuous Mortality Investigation Bureau. « CMI Mortality Projections Model: CMI_2016 », document de travail n° 97 du Mortality Projections Committee, 2017a.
- Continuous Mortality Investigation Bureau. « CMI Mortality Projections Model: Methods », document de travail n° 98 du Mortality Projections Committee, 2017b.
- Currie I.D., Durban, M. et P.H.C. Eilers. « Smoothing and Forecasting Mortality Rates », *Statistical Modelling*, vol. 4, 2004, p. 279-298.
- Institut canadien des actuaires. « La mortalité des retraités canadiens » (rapport final), 2014. En ligne : www.cia-ica.ca/docs/default-source/2014/214013f.pdf.
- Institut canadien des actuaires. « Rapport du groupe de travail sur l'amélioration de la mortalité » (rapport provisoire), 2017. En ligne : www.cia-ica.ca/docs/default-source/2017/217044f.pdf.
- Lee, R.D. et L.R. Carter. « Modelling and Forecasting US Mortality », *Journal of the American Statistical Association*, vol. 87, n° 419, 1992, p. 659-671.
- Nocedal, J. et S. Wright. « Numerical Optimization », New York, NY, Springer, 1999.
- Plat, R. « On Stochastic Mortality Modelling », *Insurance: Mathematics and Economics*, vol. 45, 2009, p. 393-404.
- Schwarz, G.E. « Estimating the Dimension of a Model », *Annals of Statistics*, vol. 6, n° 2, 1978, p. 461-464.
- Society of Actuaries. « 1994 Group Annuity Mortality Table and 1994 Group Annuity Reserving Table », *Transactions of the Society of Actuaries*, vol. XLVII, 1995, p. 865-915.
- Society of Actuaries. « Mortality Improvement Scale BB Report », 2012. En ligne : www.soa.org/files/research/exp-study/research-mortality-improve-bb-report.pdf.

Society of Actuaries. « Mortality Improvement Scale MP-2014 Report », 2014. En ligne : www.soa.org/Files/Research/Exp-Study/research-2014-mp-report.pdf.

Society of Actuaries. « *Mortality Improvement Scale MP-2015* », 2015. En ligne : www.soa.org/Files/Research/Exp-Study/research-2015-mp-report.pdf.

Society of Actuaries. « *Mortality Improvement Scale MP-2016* », 2016. En ligne : www.soa.org/Files/Research/Exp-Study/mortality-improvement-scale-mp-2016.pdf

Society of Actuaries. « *Mortality Improvement Scale MP-2017* », 2017. En ligne : www.soa.org/Files/Research/Exp-Study/mortality-improvement-scale-mp-2017.pdf.