

# Prestations à risque dans des régimes communs de rentes viagères à paiements variables

FÉVRIER 2023

Document 223040



Veilleissement  
et retraite

 **SOA**  
**Research**  
INSTITUTE



**Canadian  
Institute  
of Actuaries**

**Institut  
canadien  
des actuaires**

# Prestations à risque dans des régimes communs de rentes viagères à paiements variables

**Auteurs** Jean-François Bégin, FSA, FICA, Ph. D.  
Professeur adjoint  
Université Simon Fraser

Barbara Sanders, FSA, FICA, MSc  
Professeure agrégée  
Université Simon Fraser

**Commanditaires** Commission de recherche (Section  
de la retraite) de l'Institut de  
recherche de la Society of  
Actuaries

Institut canadien des actuaires

## Mise en garde et avis de non-responsabilité

Les opinions exprimées et les conclusions tirées sont celles des auteurs et elles ne représentent pas la position ou l'opinion officielle de l'Institut de recherche de la Society of Actuaries, de la Society of Actuaries, de l'Institut canadien des actuaires, de la Casualty Actuarial Society ou de leurs membres. L'Institut de recherche de la Society of Actuaries et l'Institut canadien des actuaires ne font aucune déclaration et n'offrent aucune garantie quant à l'exactitude de l'information.

## TABLE DES MATIÈRES

<b>Sommaire .....</b>	<b>4</b>
<b>Section 1 : Introduction, analyse documentaire et champ d'application.....</b>	<b>6</b>
<b>Section 2 : Introduction à la prestation à risque .....</b>	<b>9</b>
2.1 Valeur à risque .....	9
2.2 La prestation à risque.....	10
2.3 La PaR comme outil de budgétisation .....	11
2.4 La PaR à titre d'outil décisionnel.....	13
2.5 Limites de la PaR .....	15
<b>Section 3 : Régimes communs de rentes viagères à paiements variables.....</b>	<b>17</b>
3.1 Cadre simple pour les versements de rentes à paiements variables .....	17
3.2 Exemple.....	20
3.3 Facteur d'ajustement pour l'amélioration systématique de la mortalité .....	21
3.4 Discussion sur la mise en commun de la mortalité .....	21
<b>Section 4 : Prestations à risque dans des régimes communs de rentes viagères à paiements variables .....</b>	<b>23</b>
4.1 Exploration analytique .....	23
4.1.1 Prestation à risque minimale.....	24
4.1.2 Prestation moyenne à risque.....	25
4.2 Tests de sensibilité et analyses de robustesse .....	27
4.2.1 Taux de référence .....	28
4.2.2 Répartition de l'actif .....	29
4.2.3 Effets combinés du taux de référence et de la répartition de l'actif .....	29
4.3 Termes nominaux et réels .....	31
4.4 Évaluation de la robustesse des rendements normaux .....	33
4.5 Incidence de la mortalité idiosyncrasique .....	34
<b>Section 5 : Mot de la fin et travaux futurs .....</b>	<b>38</b>
<b>Remerciements.....</b>	<b>39</b>
<b>Annexe A : Démonstrations .....</b>	<b>40</b>
A.1 Le Comparateur moins La répartition des prestations minimales .....	40
A.2 Le Comparateur moins LA répartition des prestations moyennes.....	40
<b>Annexe B : Comparateurs exogènes .....</b>	<b>42</b>
B.1 Redéfinition de la prestation à risque minimale et la prestation moyenne à risque avec comparateurs exogènes.....	42
B.1.1 Prestation à risque minimale avec comparateur exogène.....	42
B.1.2 Prestation moyenne à risque avec comparateur exogène.....	42
B.2 Exemples avec comparateurs exogènes .....	42
B.2.1 Taux de référence .....	42
B.2.2 Répartition de l'actif .....	44
<b>Annexe C : Méthode bootstrap par blocs .....</b>	<b>46</b>
<b>Bibliographie .....</b>	<b>47</b>
<b>À propos de l'Institut de recherche de la Society of Actuaries .....</b>	<b>50</b>
<b>À propos de l'Institut canadien des actuaires .....</b>	<b>51</b>

# Prestations à risque dans des régimes communs de rentes viagères à paiements variables

## Sommaire

Plusieurs régimes de retraite modernes, y compris les régimes communs de rentes viagères à paiements variables, permettent aux retraités de convertir une prime unique en revenu à vie qui varie selon les résultats des placements et de la mortalité. Afin d'évaluer le niveau des risques assumés par les participants à ces régimes, le présent rapport renferme un ensemble de nouvelles mesures du risque – appelées prestations à risque, ou PaR – à utiliser dans le contexte des prestations variables.

Dans la foulée du riche fonds documentaire sur les mesures du risque dans les domaines de la gestion du risque et de l'actuariat, nous examinons plus particulièrement une mesure liée aux quantiles qui détermine, avec une certaine confiance, le niveau au-dessus duquel la prestation est susceptible de demeurer pendant une période donnée. Cette mesure est de nature très semblable à la valeur à risque largement répandue dans les services bancaires et d'assurance.

Le présent rapport est axé sur la communication avec les participants et l'information qui leur est fournie: nous souhaitons créer des mesures pertinentes pour permettre aux participants de comprendre le risque lié aux prestations assumé par ces régimes communs. Nous nous concentrons sur deux utilisations différentes d'une telle mesure : la budgétisation et la prise de décisions.

- Outil de budgétisation : Pour les participants actuels qui doivent planifier (et peut-être ajuster) leur consommation en fonction du revenu que leur procurera leur régime commun.
- Outil de prise de décisions : Pour les participants éventuels qui doivent évaluer les risques et les avantages liés à l'affectation volontaire d'actifs de retraite au régime commun comparativement aux autres options de décaissement disponibles.

Ces deux applications favorisent la création de deux mesures originales de type prestation à risque :

1. La prestation à risque minimale : À court terme, nous nous attendons à ce que les participants établissent leurs budgets en fonction des prestations qu'ils touchent actuellement et mettent l'accent sur leur capacité de respecter ces budgets, même au cours de la pire année. À cette fin, nous proposons d'utiliser une mesure de la prestation à risque à court terme qui repose sur la prestation minimale touchée au cours de cette période. Grâce à la prestation minimale, les participants ont confiance qu'ils pourront probablement payer toutes leurs dépenses prévues, même lorsque les prestations seront faibles.
2. La prestation moyenne à risque : Du point de vue de la prise de décisions, les participants pourraient être intéressés par une comparaison des différentes possibilités avant leur retraite (c.-à-d. avant d'acheter un produit de retraite ou d'adhérer à un régime en prévision de la retraite). La prestation à risque pourrait être utile dans cette perspective, car cette mesure pourrait informer les participants du risque associé avec chaque régime commun si l'horizon choisi est suffisamment long.

Les nouvelles mesures sont appliquées à un fonds commun stylisé de rentes viagères à paiements variables s'inspirant de Piggott et coll. (2005) pour comprendre leur fonctionnement dans ce contexte particulier.<sup>1</sup> Nous appliquons les mesures aux régimes communs stylisés et nous évaluons leur comportement lorsque les intrants utilisés dans leur calcul sont modifiés (p. ex., horizon, taux de référence, stratégie de répartition de l'actif, distribution risquée du rendement de l'actif, mortalité idiosyncrasique). Nous constatons que les mesures résistent aux changements dans la plupart des hypothèses, y compris des distributions plus réalistes du rendement de l'actif risqué et l'inclusion du risque de mortalité idiosyncrasique.

Nous concluons le présent rapport en abordant d'autres mesures et applications de l'évaluation des prestations à risque.

---

<sup>1</sup> Un régime stylisé désigne un régime représenté d'une manière qui simplifie les détails plutôt que d'essayer de montrer la réalité. Ces mesures sont choisies par souci de simplicité.

## Section 1 : Introduction, analyse documentaire et champ d'application

À mesure que diminue la prévalence des régimes de retraite garantis à l'échelle mondiale, les régimes souples comme les régimes communs de rentes viagères à paiements variables devraient gagner en popularité. Ces régimes permettent aux retraités de convertir un montant forfaitaire en revenu viager. Le régime commun ne garantit pas un niveau de revenu précis; la rente payable varie plutôt selon l'évolution des placements et de la mortalité au sein du groupe.

La mise en commun du risque de mortalité est devenue une priorité ces dernières années dans le contexte des régimes à cotisations déterminées (CD). Par conséquent, l'Organisation de coopération et de développement économiques a récemment publié des recommandations pour une bonne conception des régimes à cotisations déterminées; l'une des recommandations consiste à assurer une protection contre le risque de longévité à la retraite, et les régimes communs de rentes viagères à paiements variables répondent certainement à cette suggestion.<sup>2</sup> En regroupant les risques de mortalité de chaque participant, les régimes communs de rentes viagères à paiements variables peuvent générer un revenu plus élevé qu'un régime de retrait systématique individuel (voir, par exemple, l'Actuaire du gouvernement australien, 2014). On s'attend également à ce que les régimes communs de rentes viagères à paiements variables affichent un rendement supérieur aux rentes de détail, car il n'est pas nécessaire d'avoir un capital de risque pour soutenir des garanties coûteuses.

Divers mécanismes et produits correspondent à la vaste description des régimes communs de rentes viagères à paiements variables dans le fonds documentaire : régimes communs d'autogestion de la rente (Piggott et coll., 2005; Valdez et coll., 2006; Qiao et Sherris, 2013; Hanewald et coll., 2013), fonds communs de rentes (Stamos, 2008; Sabin, 2010; Donnelly et coll., 2013), fonds de rentes superposées (Donnelly et coll., 2014; Donnelly, 2015), tontines de retraite (Milevsky et Salisbury, 2015, 2016; Sabin et Forman, 2016; Fullmer et Sabin, 2019; Fullmer, 2019; Iwry et coll., 2020; Chen et coll., 2021), fonds d'assurance (Fullmer et Forman, 2022), rentes à versements variables (Horneff et coll., 2010; Boyle et coll., 2015), et rentes viagères à paiements variables (ACARR, 2017).<sup>3</sup> Notez que toutes ces formes de rentes peuvent être considérées comme des tontines (implicites ou explicites).<sup>4</sup>

Parmi les exemples pratiques de ces régimes communs de rentes viagères à paiements variables, mentionnons le College Retirement Equities Fund exploité par la Teachers Insurance and Annuity Association of America (TIAA) aux États-Unis depuis 1952, les rentes viagères à paiements variables gérées par le Faculty Pension Plan de l'Université de la Colombie-Britannique (UBC) depuis 1967 et la rente viagère introduite sur le marché australien par QSuper en 2021.<sup>5</sup>

Nous nous attendons à voir davantage de ces régimes de rentes viagères à paiements variables au cours des prochaines années. Au Canada, les récentes modifications apportées aux règlements de l'impôt sur le revenu qui ont accompagné la *Loi d'exécution du budget 2021* faciliteront cette tendance. Aux États-Unis, la plupart de ces régimes

---

<sup>2</sup> [traduction] « Les régimes de retraite à cotisations déterminées devraient fournir un certain niveau de revenu viager par défaut pour la phase de débours, à moins que d'autres mécanismes de pension ne prévoient déjà des paiements suffisants de rentes viagères. Le revenu viager peut provenir de rentes avec paiements garantis ou d'ententes non garanties en vertu desquelles le risque de longévité est réparti entre les participants. » (OCDE, 2022)

<sup>3</sup> La recherche universitaire sur les régimes communs de rentes viagères à paiements variables et les régimes de type tontine a été très fructueuse ces dernières années. De nombreux produits nouveaux ont été introduits; entre autres, des combinaisons de rentes et de tontines (Chen et Rach, 2019; Chen et coll., 2020) comme les rentes tontines (Chen et coll., 2019), les tontines avec legs (Bernhardt et Donnelly, 2019) et les tontines liées à des unités (Chen et coll., 2022).

<sup>4</sup> Les tontines implicites promettent aux participants un revenu à vie, mais des crédits de longévité ne leur sont pas explicitement attribués; les tontines explicites attribuent explicitement des crédits de longévité aux comptes individuels des participants (pour plus de détails, voir Bernhardt et Donnelly, 2019).

<sup>5</sup> Voir Forman et Sabin (2015), Milevsky (2015) et CREF (2022a,b) pour en savoir plus sur le régime commun de rentes viagères à paiements variables de la TIAA.

communs ne sont pas autorisés à l'heure actuelle, et le Congrès devrait adopter des lois pour les autoriser; il existe néanmoins un certain intérêt chez les praticiens en régimes de retraite (voir, p. ex., Shemtob, 2021, 2022).

Étant donné que le revenu provenant d'un régime commun de rentes viagères à paiements variables devrait varier en fonction des résultats de placement et de mortalité, il serait utile de caractériser le risque lié aux prestations. Dans la foulée du riche fonds documentaire sur les mesures du risque dans les domaines de la gestion du risque et de l'actuariat, nous examinons plus particulièrement une mesure liée aux quantiles qui détermine, avec une certaine confiance, le niveau au-dessus duquel la prestation est susceptible de demeurer pendant une période donnée. Cette mesure — de nature très semblable à la valeur à risque, ou VaR — est appelée prestation à risque (PaR). En termes simples, la mesure de la PaR informe les participants de l'ampleur des pertes possibles de prestations sur une base de comparaison et sur une période précise.

Plutôt que d'étudier les profits et les pertes comme la VaR, la PaR se concentre sur les prestations — ou les pertes éventuelles de prestations. La notion de prestations est très large; on pourrait s'intéresser aux prestations reçues à un moment précis, tandis que d'autres participants pourraient se concentrer sur la prestation minimale ou la prestation moyenne au cours d'une période donnée.

La PaR comporte une autre différence principale par rapport à la mesure classique de la VaR. Nous comparons les prestations des participants à une autre quantité ou base de comparaison appelée *comparateur*; le comparateur pourrait correspondre au niveau actuel des prestations, aux prestations futures prévues, aux prestations totales à vie ou aux prestations découlant d'une autre option de retraite, par exemple.

La prestation à risque est une nouvelle mesure précieuse pour l'information et la communication. Plus précisément, elle pourrait être utile comme :

- Outil de budgétisation : Pour les participants actuels qui doivent planifier (et peut-être ajuster) leur consommation en fonction du revenu que leur procurera leur régime commun.
- Outil de prise de décisions : Pour les participants éventuels qui doivent évaluer les risques et les avantages liés à l'affectation volontaire d'actifs de retraite au régime commun comparativement aux autres options de décaissement disponibles.

À court terme, nous nous attendons à ce que les participants fondent leurs budgets sur la pire année. À cette fin, nous proposons d'utiliser une mesure de la prestation à risque fondée sur la prestation minimale susceptible de se réaliser sur une période relativement courte; cette mesure particulière est désignée PaR minimale (PaRm) dans le présent rapport. L'utilisation du minimum permet aux participants de croire avec confiance qu'ils seront probablement en mesure de payer toutes les dépenses prévues dans leur budget, même lorsque les prestations seront faibles.

Du point de vue de la prise de décisions, les participants pourraient souhaiter comparer différents mécanismes avant leur retraite (c.-à-d. avant d'acheter un produit de retraite ou d'adhérer à un régime de retraite). La prestation à risque pourrait être utile dans cette perspective, car cette mesure pourrait renseigner les participants sur le risque associé à chaque opération éventuelle si l'horizon choisi est suffisamment long. La budgétisation à court terme mentionnée ci-dessus met l'accent sur le pire résultat sur un horizon donné; toutefois, se concentrer sur la pire année est moins logique à long terme, car les mauvaises années pourraient être compensées par de meilleures. À long terme, les budgets devront être rajustés en fonction des nouvelles prestations et des nouveaux besoins. Pour cette raison, nous recourons à la prestation moyenne à risque (PmaR) lorsque nous utilisons la PaR comme outil décisionnel.

Ces deux nouvelles mesures, la PaRm et la PmaR, sont appliquées à un régime commun stylisé de rentes viagères à paiements variables pour comprendre comment elles fonctionnent dans ce contexte particulier. Nous appliquons les mesures et évaluons leur comportement lorsque les facteurs utilisés dans leur calcul sont modifiés (p. ex., l'horizon,

le taux de référence, la stratégie de répartition de l'actif, la distribution risquée du rendement de l'actif et la mortalité idiosyncrasique).

La contribution du présent rapport repose sur l'introduction d'un ensemble de nouvelles mesures à utiliser dans le contexte de prestations variables, et plus particulièrement dans le contexte des régimes communs de rentes viagères à paiements variables. Comme nous l'avons mentionné plus haut, nous mettons l'accent sur la communication avec les participants et l'information qui leur est fournie : nous souhaitons créer des mesures pertinentes pour permettre aux participants de comprendre le risque lié aux prestations qui pèse sur ces régimes. Nous croyons que les deux mesures particulières présentées dans le rapport atteignent cet objectif.

On pourrait souhaiter utiliser les PaR dans des contextes autres que ceux de la communication et de l'information fournie (p. ex., la conception de régimes communs). Nous avertissons les utilisateurs que le seul recours à la PaR pourrait être insatisfaisant pour de telles autres applications, car il ne raconte pas toute l'histoire. Par exemple, la prestation à risque ne fournit pas de renseignements sur la variabilité des prestations d'une année à l'autre. En effet, la PaR ne tient compte que de la distribution des prestations dans tous les scénarios possibles à des moments précis et non de la façon dont les prestations pourraient évoluer en fonction du temps dans un seul scénario.

Malgré les limites possibles de la PaR, nous croyons qu'il s'agit d'un excellent outil lorsqu'elle est utilisée de façon appropriée – comme outil de budgétisation et de prise de décisions pour les participants, par exemple. De plus, lorsqu'elle est jumelée à d'autres mesures, la PaR pourrait être utilisée par les promoteurs et les fournisseurs de régimes, et par leurs actuaires pour concevoir les régimes communs de rentes viagères à paiements variables. Toutefois, dans le présent rapport, nous nous concentrons uniquement sur la communication et les applications d'information discrétionnaire découlant de la mesure.

Le rapport est structuré comme suit : La section 2 présente la prestation à risque dans toute sa généralité et elle propose deux applications spécifiques de la nouvelle mesure du risque : la PaRm et la PmaR. La section 3 présente ensuite un régime commun stylisé de rentes viagères à des fins d'illustration. La section 4 applique les mesures du risque au régime commun stylisé de rentes viagères présenté à la section 3 et évalue la robustesse de la PaRm et de la PmaR en variant diverses hypothèses (c.-à-d. l'horizon, le taux de référence, la stratégie de répartition de l'actif, le rendement risqué des actifs et la mortalité). La section 5 renferme la conclusion et une discussion sur les pistes de recherche futures.

## Section 2 : Introduction à la prestation à risque

Cette section présente une nouvelle mesure – la prestation à risque, ou PaR – pour communiquer efficacement le risque aux participants. Comme il est mentionné dans l’introduction, il existe maintenant de nombreux régimes et produits de retraite sans garantie ferme, et il est primordial pour les participants de comprendre l’ampleur du risque qu’ils assument.

Nous inspirant du fonds documentaire sur les mesures du risque, nous définissons d’abord la mesure de la PaR dans toute sa généralité; cette définition est plus large que le contexte du régime commun de rentes viagères à paiements variables que nous examinerons aux prochaines sections du présent rapport. En effet, la prestation à risque pourrait être utilisée par les actuaires pour communiquer le risque dans pratiquement tous les mécanismes pour lesquels les prestations ne sont pas certaines.

La PaR générale utilise quatre facteurs – la statistique des prestations, le comparateur, l’horizon et le niveau de probabilité – et les choix spécifiques de ces quatre facteurs donnent lieu à des mesures différentes. Comme le présent rapport est axé sur la communication aux participants, nous proposons deux PaR distinctes : une servant d’outil de budgétisation et l’autre d’outil de prise de décisions. La première mesure est utilisée pour aider les participants actuels à comprendre à quel point leurs prestations sont risquées à court terme. La seconde mesure permet aux participants éventuels de comparer les avantages et les inconvénients de différents régimes; elle leur fournit des renseignements sur le risque de prestations à moyen et long termes.

### 2.1 VALEUR À RISQUE

Avant d’introduire notre nouvelle mesure, la PaR, rappelons d’abord les rudiments de la VaR, car elle constitue l’un des principaux éléments de base de la construction de la prestation à risque. En termes simples, la VaR est une mesure probabiliste du potentiel de perte. Elle quantifie la perte maximale que ne dépassera pas un investisseur avec une certaine probabilité, pour un horizon donné.

Soit  $X(\tau)$  une variable aléatoire de perte continue (où les pertes sont représentées par des nombres positifs) sur un horizon donné que nous désignons par  $\tau$ . La probabilité d’observer diverses pertes potentielles est représentée par la densité de  $X(\tau)$ . Par contre, la fonction de répartition  $F_{X(\tau)}(x)$  indique la probabilité que la perte ne dépasse pas  $x$  :

$$F_{X(\tau)}(x) = \mathbb{P}(X(\tau) \leq x).$$

Mathématiquement, la fonction quantile est l’inverse de la fonction de répartition. Étant donné un niveau de probabilité  $p$ , elle identifie le niveau de perte maximal  $x$  de sorte que

$$\mathbb{P}(X(\tau) \leq x) = p.$$

La valeur à risque au niveau de probabilité  $p \in (0,1)$  est le  $p$ -quantile de  $X(\tau)$ , ou

$$F_{X(\tau)}(\text{VaR}_p[X(\tau)]) = p \quad \Leftrightarrow \quad \text{VaR}_p[X(\tau)] = F_{X(\tau)}^{-1}(p).$$

Par exemple, une VaR de 100 \$ à 95 % sur une semaine signifie qu’il existe une probabilité de 95 % que les pertes de l’investisseur ne dépasseront pas 100 \$ au cours de la semaine suivante, ce qui équivaut à une probabilité de 5 % que les pertes dépasseront effectivement 100 \$.

Nous illustrons la relation entre la densité, la fonction de répartition et la valeur à risque à la figure 1. La partie supérieure montre la probabilité d’observer diverses pertes potentielles. La zone sous cette courbe (en bleu) représente la probabilité d’observer une perte inférieure à une quantité donnée, c’est-à-dire  $\mathbb{P}(X(\tau) \leq x)$ , qui est aussi la valeur de la fonction de répartition de  $X(\tau)$  à  $x$ , désignée par  $F_{X(\tau)}(x)$  ci-dessus et illustrée dans la partie

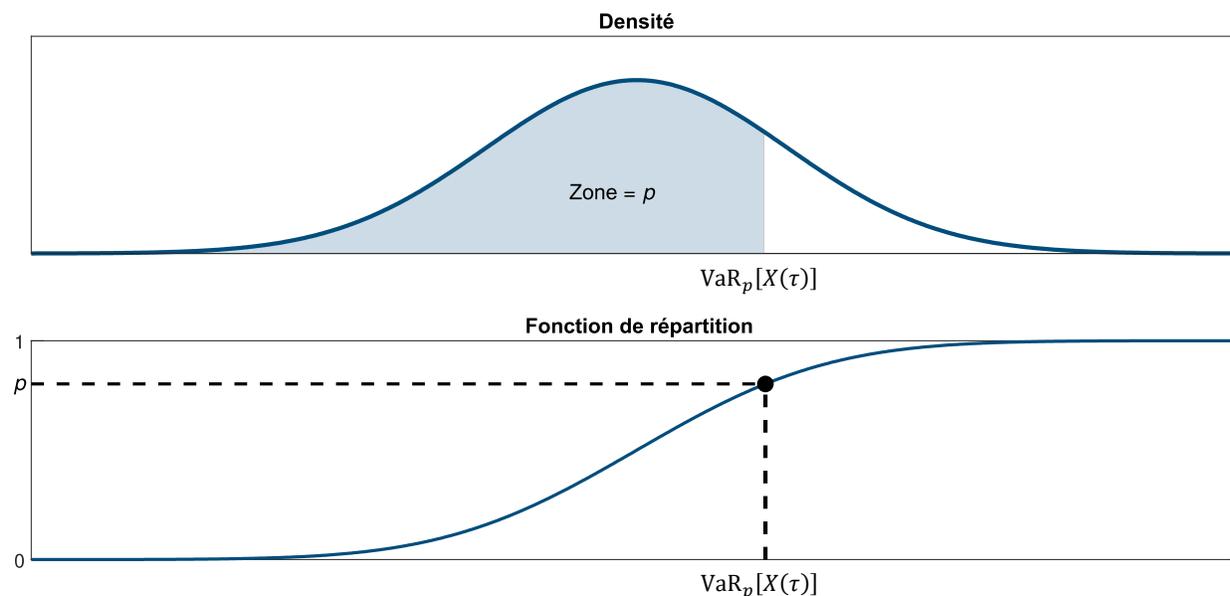
inférieure de la figure 1. Si nous voulons connaître le niveau de perte  $x$  associé à une zone  $p$  sous la courbe de densité, nous pouvons simplement lire la  $x$ -coordonnée du point sur la fonction de densité cumulative qui a la hauteur  $p$ . Cette quantité est  $\text{VaR}_p[X(\tau)]$  parce que

$$F_{X(\tau)}(\text{VaR}_p[X(\tau)]) = F_{X(\tau)}\left(F_{X(\tau)}^{-1}(p)\right) = p.$$

En résumé, le niveau de perte associé à une zone  $p$  sous la courbe de densité et à gauche est  $\text{VaR}_p[X(\tau)]$ , et la fonction de répartition de  $X(\tau)$  évaluée à  $\text{VaR}_p[X(\tau)]$  est  $p$ . En inversant la fonction de répartition, on peut alors obtenir la fonction quantile, c'est-à-dire une fonction qui prend un niveau de probabilité comme intrant (c.-à-d.  $p$ ) et donne le niveau de perte associé à cette probabilité (c.-à-d.  $\text{VaR}_p[X(\tau)]$ ).

Figure 1

#### RELATION ENTRE LA DENSITÉ, LA FONCTION DE RÉPARTITION ET LA VALEUR À RISQUE



Cette figure montre la relation entre la densité (graphique supérieur), la fonction de répartition  $F_{X(\tau)}$  (graphique inférieur) et la valeur à risque. La densité représente la probabilité d'observer diverses pertes; la zone sous cette courbe et à gauche d'un point donné produit la valeur de la fonction de répartition à ce point. La valeur à risque est obtenue en évaluant l'inverse de la fonction de répartition – la fonction quantile – pour un niveau de probabilité donné (c.-à-d.  $p$  dans ce cas).

Au cours des années 1990, la VaR est devenue l'une des façons les plus populaires pour mesurer le risque.<sup>6</sup> Elle est encore largement utilisée aujourd'hui en gestion des risques, même si elle a suscité la controverse, notamment en raison d'une interprétation erronée et d'une mauvaise utilisation par le passé.<sup>7</sup>

## 2.2 LA PRESTATION À RISQUE

À l'instar de la VaR, la PaR a un niveau de probabilité et un horizon, désignés respectivement par  $p$  et  $\tau$ . Toutefois, plutôt que d'examiner les profits et pertes, l'accent est placé sur les prestations. La notion de prestations est très

<sup>6</sup> Voir Holton (2002) pour l'historique de la VaR, à partir de ses origines, en 1922.

<sup>7</sup> La VaR est controversée depuis qu'elle est passée des pupitres des négociants au domaine public en 1994. Par exemple, elle a fait l'objet d'un débat largement médiatisé entre Philippe Jorion et Nassim Taleb en 1997. Voir Jorion (1997) pour plus de détails.

large; on pourrait s'intéresser aux prestations reçues à un moment précis, tandis que d'autres pourraient se concentrer sur la prestation moyenne ou la prestation minimale au cours d'une période donnée. L'utilisateur final de la PaR fait ce choix. Nous appelons cet intrant la *statistique des prestations*, et nous désignons la variable aléatoire correspondante par  $\beta(\tau)$ .

Un autre élément clé de la PaR est le *comparateur*, désigné ici par  $C$ , qui sert de point de référence pour le niveau des prestations  $\beta(\tau)$ . Le comparateur pourrait être le niveau actuel des prestations au moment du calcul de la PaR, le niveau futur prévu des prestations ou le total des rentes viagères, par exemple.

De façon très générale, la PaR au niveau de probabilité  $p$  pour la statistique des prestations  $\beta(\tau)$  et le comparateur  $C$  est définie comme suit :

$$\text{PaR}_p[C - \beta(\tau)] = F_{C-\beta(\tau)}^{-1}(p). \quad (1)$$

L'expression  $C - \beta(\tau)$  représente le déficit de la prestation  $\beta(\tau)$  par rapport au comparateur  $C$ . La PaR est le  $p$ -quantile de ce déficit; elle mesure le risque de perte de prestations du participant par rapport au comparateur.

Par exemple, si la statistique des prestations est choisie comme prestation reçue pendant un an et que le comparateur — disons la prestation actuelle — est 1 000 \$, alors dire que *la PaR à 95 % est 100 \$* signifie que le participant recevra une prestation supérieure à 900 \$ l'année suivante avec une probabilité de 95 %.

Les deux sous-sections qui suivent portent sur des choix particuliers de statistiques sur les prestations et de comparateurs qui sont pertinents pour les participants.

### 2.3 LA PAR COMME OUTIL DE BUDGÉTISATION

Les régimes sans garantie ferme peuvent prévoir des niveaux de prestation variables. Lorsque les participants établissent leur budget des dépenses, ils doivent comprendre dans quelle mesure les prestations pourraient être réduites.

Nous conceptualisons la budgétisation à la retraite comme le processus de planification des dépenses discrétionnaires tenant compte du revenu de retraite et des dépenses fixes projetés. Cet exercice a une portée à court terme en raison de l'incertitude des revenus projetés et des dépenses proprement dites. Plus précisément, à mesure que les gens vieillissent, leurs besoins et leurs souhaits peuvent varier sensiblement, tout comme leurs habitudes en matière de dépenses. Blanchett (2014) observe un « sourire lié aux dépenses à la retraite » dans les données agrégées aux États-Unis; en termes réels, les dépenses sont plus élevées près de la retraite, puis elles diminuent et augmentent à nouveau vers la fin de la vie. Dans le milieu de la planification financière, cette tendance est interprétée dans le contexte de trois phases distinctes de la retraite :<sup>8</sup>

- Les années « feu vert » où les retraités ont la possibilité et la capacité de multiplier leurs activités – cette période est caractérisée par des dépenses supplémentaires pour les voyages, les passe-temps et les loisirs.
- Les années « feu jaune », marquées par une diminution des activités et des déplacements, se traduisent par des dépenses discrétionnaires plus modestes.
- Les années « feu rouge » où les dépenses liées à la santé ont tendance à augmenter.

---

<sup>8</sup> Ces phases correspondent au fonctionnement du système de santé aux États-Unis. Les retraités canadiens traversent également des phases semblables, les dépenses liées à la santé pouvant augmenter à un âge avancé en raison des besoins de soins de longue durée qui ne sont pas couverts par le système universel de soins de santé financé par l'État canadien.

Bien que ces phases soient assez prononcées dans les données agrégées sur les dépenses, il existe une vaste gamme d'expériences au niveau individuel, le passage d'une phase à l'autre étant généralement dicté par des facteurs hors du contrôle des retraités plutôt que d'être planifié à l'avance. Par conséquent, il est préférable de limiter le budget individuel à court terme (maximum de cinq ans) et d'apporter les ajustements nécessaires en fonction de l'évolution de la situation.<sup>9</sup>

La PaR peut être une mesure utile pour les retraités qui participent à un tel exercice budgétaire à court terme. Plus précisément, comme ils planifient pour les cinq prochaines années, ils auraient avantage à ajuster leurs dépenses en fonction de leur revenu projeté dans un scénario défavorable (plutôt que neutre ou fondé sur la meilleure estimation). Cette justification leur permet de payer toutes leurs dépenses, même lorsque les prestations diminuent plus fortement que prévu. Pour en saisir toute l'ampleur, la statistique des prestations dans la mesure de la PaR est fixée à la prestation minimale observée sur un horizon donné de  $\tau$  est cinq ans dans cette sous-section.<sup>10</sup>

La prochaine étape consiste à choisir un comparateur. Nous supposons que les participants compareraient les prestations potentielles à leur niveau actuel  $B(0)$ .<sup>11</sup> Ce choix est justifié du point de vue de la formation des habitudes : à court terme et aux fins de budgétisation, les participants se soucient surtout des déficits par rapport au niveau actuel (voir Pollak, 1970; MacDonald et coll., 2013).

Soit  $B(t)$  la valeur de la prestation au temps- $t$ , où le temps 0 correspond au temps où la PaR a été calculée. À titre d'exemple, supposons que les prestations sont révisées une fois par an, sans décalage entre la fin de l'année et le paiement de la prestation ajustée. La prestation minimale sur un horizon de  $\tau$  années équivaut alors à

$$\underline{B}(\tau) = \min_{t \in \{1, \dots, \tau\}} B(t),$$

et le pire déficit qui en résulte pour cet horizon dans un seul scénario est  $B(0) - \underline{B}(\tau)$ .<sup>12</sup>

La figure 2 montre une trajectoire hypothétique des prestations sur une période de cinq ans (cercles bleu pâle). La prestation s'écarte de sa valeur actuelle  $B(0)$  et elle évolue au fil du temps. Pour ce cheminement particulier, la prestation minimale (ou la pire) des cinq prochaines années est observée à la quatrième année (ligne bleue pointillée). La différence entre la prestation actuelle (ligne noire pointillée) et ce minimum représente le plus grand déficit de prestations du participant au cours des cinq prochaines années par rapport au comparateur selon ce scénario particulier.

Il convient de souligner que même si la valeur du comparateur est connue *ex ante*,  $\underline{B}(5)$  est une quantité aléatoire dont la valeur devient connue seulement *ex post* (c.-à-d. à la fin de l'horizon). Différentes trajectoires de prestations hypothétiques donnent lieu à différents déficits. Lorsque l'on établit un budget, il est utile d'avoir une idée de l'ordre de ces déficits dans des scénarios extrêmes. C'est ce que la quantité PaRm(5) tente de saisir : il s'agit du plus gros déficit observé au cours des cinq prochaines années par rapport à la prestation actuelle dans un scénario défavorable

<sup>9</sup> Dans la pratique, certains régimes communs de rentes viagères à paiements variables et régimes de retraite à risques partagés comportent un certain lissage et des décalages administratifs qui retardent la comptabilisation des gains et pertes actuariels. Un horizon de cinq ans est suffisamment long pour refléter les conséquences de la mise à jour de la prestation à une fréquence moindre que chaque année ou de l'introduction d'un décalage administratif entre la fin de l'année et la variation de la prestation.

<sup>10</sup> Cinq ans représentent évidemment un choix subjectif; des horizons plus courts ou plus longs auraient pu être choisis en fonction du régime commun, de l'aversion pour le risque de ses participants et de leur horizon de placement. Nous laissons à l'utilisateur final le soin de déterminer l'horizon qui correspond à ses besoins et à son contexte.

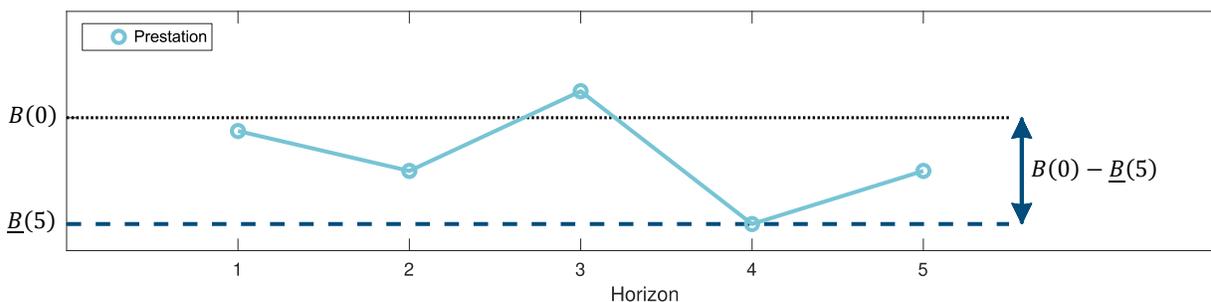
<sup>11</sup> Dans notre contexte, la prestation actuelle correspond à la prestation initiale. Toutefois, de façon générale, les mesures de la PaR peuvent être calculées en tout temps après la création du régime commun; la prestation actuelle est donc interprétée comme étant la prestation la plus récente versée aux participants.

<sup>12</sup> Il convient de souligner que nous n'incluons pas la prestation actuelle dans notre calcul (c.-à-d. la prestation au temps 0) parce qu'elle est connue et ne comporte aucune incertitude.

qui représente un événement sur 40 (probabilité de 2,5 %). Autrement dit, le plus grand déficit de prestations observé au cours des cinq prochaines années devrait être plus faible que la  $\text{PaRm}(5)$  39 fois sur 40. Le niveau de probabilité de 97,5 % est jugé conservateur, mais pas trop prudent.<sup>13,14</sup>

Figure 2

### TRAJECTOIRE HYPOTHÉTIQUE DE PRESTATIONS ET SON MINIMUM $\underline{B}(5)$



Cette figure montre la trajectoire hypothétique d'une prestation sur une période de cinq ans (cercles bleu pâle), ainsi que la prestation actuelle  $B(0)$  (ligne noire pointillée) et la prestation minimale au cours de la période  $\underline{B}(5)$  (ligne bleue pointillée). La différence entre la prestation actuelle et la prestation minimale sur un horizon de cinq ans est la mesure du déficit de la prestation minimale  $\underline{B}(5)$  par rapport au comparateur  $B(0)$ .

Mathématiquement, nous remplaçons la statistique des prestations  $\beta(\tau)$  par le minimum  $\underline{B}(\tau)$  dans l'équation (1) pour obtenir

$$\text{PaRm}(5) \equiv \text{PaR}_{97,5\%}[B(0) - \underline{B}(5)] = F_{B(0) - \underline{B}(5)}^{-1}(0,975), \quad (2)$$

où  $\text{PaRm}(5)$  représente la prestation à risque minimale de cinq ans, tout en supposant un niveau de probabilité de 97,5 %, et la prestation actuelle comme comparateur.

La section 4 applique cette mesure de la PaR aux régimes communs de rentes viagères à paiements variables et elle prévoit des tests de robustesse pour évaluer certains des choix subjectifs faits ci-dessus.

## 2.4 LA PAR À TITRE D'OUTIL DÉCISIONNEL

Du point de vue des participants, la PaR peut également être utilisée comme un outil décisionnel. Les participants pourraient souhaiter comparer différents régimes avant d'adhérer à l'un ou l'autre, et cette comparaison pourrait comprendre une évaluation du potentiel d'insuffisance des prestations pour chaque régime.

L'horizon pertinent aux fins de la prise de décisions est plus long que l'horizon de budgétisation examiné à la section 2.3. Nous utilisons un horizon de 20 ans, ce qui se rapproche de l'espérance de vie moyenne à la retraite. On pourrait choisir un horizon légèrement plus long au besoin, surtout à la lumière de l'amélioration de la longévité

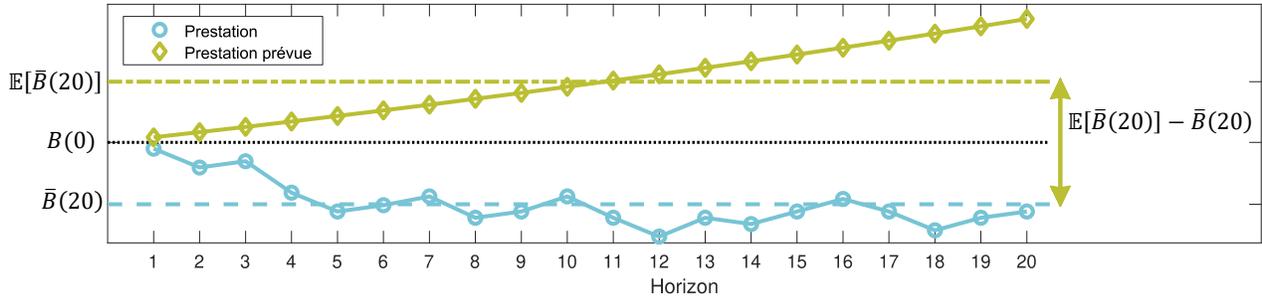
<sup>13</sup> Il existe évidemment un lien entre le niveau de probabilité et l'horizon considéré. En effet, un horizon plus long devrait être jumelé à un niveau plus bas et un horizon plus court à un niveau plus élevé. Comme expliqué dans Dhaene et coll. (2008), une bonne règle d'approximation pour le niveau de probabilité de mesure du risque convenable pour un horizon  $\tau$  est  $p = p_{\text{annuelle}}^{\tau}$ , où  $p_{\text{annuelle}}$  est le niveau de probabilité annuel. À noter qu'en supposant que  $p_{\text{annuelle}} = 99,5\%$  (c.-à-d. le niveau utilisé pour l'exigence de capital de solvabilité en vertu de Solvabilité II) donne un niveau d'environ 97,5 % sur cinq ans, soit le niveau sélectionné pour la PaR examinée dans la présente sous-section.

<sup>14</sup> Même si ce niveau correspond au cadre de Solvabilité II, nous reconnaissons que les utilisateurs finaux pourraient vouloir appliquer différents niveaux de probabilité en fonction de leur but et de leurs besoins. Nous encourageons les spécialistes à trouver des niveaux de probabilité conformes à leurs objectifs de communication et d'information.

observée au cours des dernières décennies; nous prévoyons que le fait de porter l'horizon de 20 ans à 25 ou 30 ans n'aura pas d'incidence importante sur la mesure.

Figure 3

TRAJECTOIRE HYPOTHÉTIQUE DE PRESTATIONS ET SA MOYENNE  $\bar{B}(20)$



Cette figure montre une trajectoire hypothétique des prestations sur une période de 20 ans (cercles bleu pâle) ainsi que la prestation actuelle  $B(0)$  (ligne noire pointillée), la trajectoire prévue des prestations (diamants verts), la prestation moyenne prévue au cours des 20 prochaines années  $\mathbb{E}[\bar{B}(20)]$  (ligne verte pointillée) et la prestation moyenne au cours de la période  $\bar{B}(20)$  (ligne bleu pâle pointillée). La différence entre la prestation moyenne prévue et la prestation moyenne sur un horizon de 20 ans correspond au déficit de la prestation moyenne  $\bar{B}(20)$  par rapport au comparateur  $\mathbb{E}[\bar{B}(20)]$ .

À plus long terme, les prestations pourraient varier pour deux raisons principales. D'une part, le régime pourrait cibler un modèle de prestations non nivelées (c.-à-d. à la hausse ou à la baisse).<sup>15</sup> Par ailleurs, il existe une incertitude statistique au sujet de cette cible : les résultats réels différeront des résultats prévus, que les prestations prévues affichent une trajectoire à la hausse ou à la baisse, ou qu'elles soient nivelées. Pour élaborer une mesure du déficit qui tient compte de ces deux aspects, nous nous concentrons sur le niveau des prestations moyennes sur l'ensemble de l'horizon et nous comparons la prestation « moyenne réelle » et la prestation « moyenne prévue ». Autrement dit, la prestation moyenne observée sur l'horizon que nous avons établi devient la statistique des prestations et la prestation moyenne prévue devient le comparateur.

Enfin, nous utilisons le niveau de probabilité de 90 %, ce qui représente un événement sur dix.<sup>16</sup>

Mathématiquement, la prestation moyenne sur un horizon de  $\tau$  années est exprimée par la formule

$$\bar{B}(\tau) = \frac{1}{\tau} \sum_{t=1}^{\tau} B(t),$$

et la prestation moyenne prévue est  $\mathbb{E}[\bar{B}(\tau)]$ .

Le remplacement de la statistique des prestations  $\beta(\tau)$  par la moyenne  $\bar{B}(\tau)$  et le comparateur  $C$  par  $\mathbb{E}[\bar{B}(\tau)]$  dans l'équation (1) donne

$$\text{PmaR}(20) \equiv \text{PaR}_{90\%}[\mathbb{E}[\bar{B}(20)] - \bar{B}(20)] = F_{\mathbb{E}[\bar{B}(20)] - \bar{B}(20)}^{-1}(0,9), \quad (3)$$

<sup>15</sup> Par exemple, dans le contexte des régimes communs de rentes viagères à paiements variables, une tendance croissante des prestations prévues pourrait être observée si l'on détermine que le taux de référence est sensiblement inférieur aux rendements prévus du régime. Les prestations attendues pourraient afficher une tendance décroissante si le taux de référence est supérieur au rendement attendu du portefeuille.

<sup>16</sup> Cela correspond à un niveau annuel de probabilité de 99,5 %, comme prescrit par Solvabilité II, puisque  $0,995^{20} \approx 0,9$ .

où la  $PmaR(20)$  représente la prestation moyenne à risque sur 20 ans, en supposant un niveau de probabilité de 90 %.

La figure 3 reprend la figure 2, mais pour la prestation moyenne plutôt que la prestation minimale; elle affiche une trajectoire hypothétique des prestations sur un horizon de 20 ans (cercles bleu pâle). De cette réalisation, nous pouvons dégager la prestation *moyenne* observée au cours de ces 20 années, désignée par  $\bar{B}(20)$  (ligne pointillée bleu pâle). La prestation prévue (théorique) est représentée par des diamants verts à la figure 3 et son niveau *moyen* au cours des 20 prochaines années est indiqué par la ligne pointillée verte. Cette dernière valeur est ensuite comparée à la prestation moyenne observée, la différence entre les deux représentant le montant perdu par le participant comparativement à ce qu'il était censé toucher (selon la valeur prévue) à long terme.

Encore une fois, le déficit  $\mathbb{E}[\bar{B}(20)] - \bar{B}(20)$  est représenté par une valeur aléatoire qui varie d'un scénario à l'autre. La  $PmaR(20)$  représente le déficit dans un scénario défavorable sur 20 ans susceptible de se concrétiser une fois sur dix.<sup>17</sup> Autrement dit, dans 10 % des scénarios futurs possibles, nous prévoyons un déficit de  $PmaR(20)$  ou plus.

## 2.5 LIMITES DE LA PAR

La prestation à risque comporte des limites semblables à celles de la valeur à risque :<sup>18</sup>

- La PaR procure un faux sentiment de sécurité et son applicabilité est limitée. La perte réelle de prestations peut dépasser la PaR. Malheureusement, de nombreux utilisateurs finaux pourraient considérer la PaR comme *la plus grande perte subie par un participant*. En réalité, ce nombre peut être loin de la pire perte de prestations que peut subir un participant.
- Elle n'a d'égal que les hypothèses utilisées pour calculer la mesure. La mesure de la PaR dépend de certaines données subjectives – le niveau de probabilité, l'horizon, la statistique des prestations et le comparateur – et des hypothèses utilisées pour calculer les prestations – en particulier la variabilité du rendement des placements. La modification de ces hypothèses et intrants influera sur le résultat final.
- Elle ne doit pas être utilisée comme objectif d'un exercice d'optimisation, car elle peut donner lieu à des décisions sous-optimales. Il est bien connu que l'utilisation de la VaR – et par extension, de la PaR – dans un problème de minimisation des risques produit des résultats contraires à l'intuition : en ne tenant pas compte de l'ampleur des pertes lorsque la probabilité limite est dépassée, vous exposez les participants à des prestations très, très faibles.<sup>19</sup> Nous exprimons donc certaines réserves quant à l'utilisation de la PaR par les actuaires dans le contexte de la conception; il faudrait l'utiliser avec d'autres mesures pour saisir toutes les facettes du risque lié aux prestations.

Pour faire suite au dernier point, il faut faire preuve d'extrême prudence lorsqu'on utilise la PaR dans le contexte de la conception, car elle ne dit pas tout.

- Certains régimes peuvent produire une PaR moindre (et donc plus souhaitable), mais aux dépens d'une autre caractéristique de la répartition des prestations. Par exemple, un régime commun de rentes viagères à paiements variables offrant un faible taux de référence crée une tendance à l'augmentation des prestations, ce qui abaisse la PaR; toutefois, un tel régime produirait aussi des prestations courantes beaucoup moins

<sup>17</sup> En supposant qu'un participant devait recevoir 10 000 \$ en moyenne chaque année et que sa  $PmaR(20)$  est de 1 000 \$, il doit s'attendre à recevoir une prestation de moins de 9 000 \$ en moyenne chaque année au cours des 20 prochaines années dans le pire des scénarios futurs sur dix (comme celui présenté à la figure 3).

<sup>18</sup> Un autre problème afflige la VaR: elle n'est pas sous-additive (voir, par exemple, Artzner et coll., 1999, pour plus de détails). Toutefois, dans le contexte de la PaR, ce problème est moins grave.

<sup>19</sup> Dans un contexte différent, Basak et Shapiro (2001) soulignent que les gestionnaires qui utilisent la VaR pour la répartition des portefeuilles investissent souvent dans des portefeuilles plus risqués que ceux qui n'utilisent pas la VaR comme outil d'évaluation des risques.

élevées. Dans ces cas, il pourrait être trompeur de ne tenir compte que de la PaR, sans envisager le niveau attendu des prestations.

- La prestation à risque ne se prononce pas sur la variabilité des prestations d'une année à l'autre. En effet, la PaR ne tient compte que de la répartition des prestations dans tous les scénarios possibles à des moments précis, et non de la façon dont les prestations pourraient évoluer en fonction du temps dans un seul scénario.

Malgré les limites et les critiques susmentionnées, nous croyons que la PaR est un excellent outil lorsqu'elle est utilisée de façon appropriée – comme outil de budgétisation et de prise de décisions pour les participants, par exemple.

## Section 3 : Régimes communs de rentes viagères à paiements variables

Comme il est mentionné dans l'introduction, certains régimes communs de rentes viagères à paiements variables existent déjà. Le présent rapport n'a pas pour but d'évaluer et de comparer les différents régimes, mais plutôt de montrer comment calculer la PaR dans le contexte d'un régime hypothétique donné. Nous choisissons une structure très simple pour laquelle les prestations sont ajustées annuellement en fonction du rendement des actifs et de l'expérience de mortalité réalisée. Le fonctionnement du régime commun est semblable à celui expliqué dans Piggott et coll. (2005) dans le contexte des régimes collectifs d'autogestion de la rente. Il rappelle également la règle de mise à jour des prestations utilisée par le College Retirement Equities Funds (CREF, 2022a,b).

Ce régime est loin d'être général et il n'englobe pas tous les régimes communs de rentes viagères à paiements variables. Nous souhaitons plutôt mettre l'accent sur une version simple du régime commun – un groupe fermé de participants et aucune amélioration systématique de la mortalité – afin de mieux comprendre le comportement de la PaR dans le contexte de ces mécanismes.<sup>20</sup>

En plus de fournir des détails techniques sur les régimes communs stylisés de rentes viagères à paiements variables examinés dans le rapport, la présente section donne un exemple de la façon dont les prestations sont déterminées. La dernière partie de la section porte sur la mise en commun de la mortalité, qui est l'une des principales caractéristiques de ces régimes communs de rentes viagères à paiements variables.

### 3.1 CADRE SIMPLE POUR LES VERSEMENTS DE RENTES À PAIEMENTS VARIABLES

Nous examinons un régime commun simple et stylisé de rentes viagères à paiements variables s'inspirant de Piggott et coll. (2005), Valdez et coll. (2006), Qiao et Sherris (2013), et Hanewald et coll. (2013).<sup>21,22</sup> Nous suivons les principales étapes permettant de mettre à jour les prestations de ces régimes.

Nous utilisons  $\mathcal{L}_t$  pour représenter l'ensemble des survivants au temps  $t$ , c'est-à-dire  $k \in \mathcal{L}_t$  si et seulement si la  $k^e$  personne est vivante au temps  $t$ . Supposons qu'au temps 0, un groupe de rentiers décide du montant qu'ils souhaitent investir dans un groupe (fermé);  $A_k(0)$  désigne l'investissement initial fait par le participant  $k$ , de sorte que la valeur totale de l'actif est exprimée par la formule

$$A(0) = \sum_{k \in \mathcal{L}_0} A_k(0).$$

Pour chaque participant, la prestation actuelle de  $B_k(0)$  (ou la prestation initiale dans le cas présent) est obtenue au moyen de la formule

$$B_k(0) = \frac{A_k(0)}{\ddot{a}_{x_k}}, \quad (4)$$

où  $\ddot{a}_{x_k}$  est le prix d'une rente due pour la  $k^e$  vie, dont on suppose qu'elle est vieille  $x_k$  à l'origine; c'est-à-dire :

<sup>20</sup> Des modifications simples du régime de base peuvent permettre la mise sur pied d'un groupe ouvert et des améliorations systématiques de la mortalité. Nous commentons ces deux modifications dans le présent rapport sans les mettre en œuvre.

<sup>21</sup> Ce régime commun stylisé de rentes viagères à paiements variables est aussi appelé méthode de versement nominal dans le fonds documentaire (voir, par exemple, Sabin et Foreman, 2016). La raison d'être de cette méthode est de mettre à jour les prestations en distribuant le contenu des comptes des défunts aux survivants en proportion du versement nominal revenant à chaque survivant.

<sup>22</sup> Sabin (2010) et Donnelly (2015) ont montré que ce régime introduit un biais qui favorise certains participants au détriment d'autres; autrement dit, la valeur attendue du paiement est plus élevée pour certains participants que celle sous-entendue par la neutralité actuarielle, et moindre pour d'autres. Ces études ont fait valoir que ce biais est très faible si le nombre de participants est élevé.

$$\ddot{a}_{x_k} = \sum_{s=0}^{\infty} p_{x_k} \exp(-sh),$$

à l'aide de la notation actuarielle standard. À noter que, par souci de commodité, nous supposons que le régime commun stylisé de rentes viagères à paiements variables verse des prestations au début de l'année.

Dans ce régime commun stylisé de rentes viagères à paiements variables, le prix de la rente est obtenu au moyen de deux hypothèses principales :

1. Une table de mortalité fixe et constante représentative de la mortalité systématique dans le bassin de participants.<sup>23</sup>
2. Un taux d'intérêt fixe appelé taux de référence (composé en continu) – désigné par  $h$ .

Dans le présent rapport, nous utilisons les taux composés en continu pour faciliter les calculs. Nous reconnaissons que certains spécialistes connaissent mieux les taux annuels en vigueur. Dans ce cas, on peut simplement remplacer les facteurs d'actualisation en utilisant la relation suivante :

$$\exp(-sh) = (1 + \tilde{h})^{-s},$$

où  $\tilde{h} = \exp(h) - 1$ . Ces substitutions ne devraient pas changer les résultats affichés dans le présent rapport, en supposant que les taux composés en continu sont convertis adéquatement en taux annuels effectifs.

À noter que contrairement à la section 2, nous ajoutons des indices aux prestations pour indiquer clairement que les prestations peuvent être différentes d'un participant à l'autre dans cette section.

Nous présentons maintenant une règle générale pour le calcul des paiements futurs de prestations dans le cas où le modèle de survie actuarielle est différent des prévisions et où le taux de rendement réalisé du portefeuille d'actifs est différent du taux de référence.

Au temps 0, le paiement à chaque survivant est exprimé par l'équation (4). Toutefois, au temps 1, la valeur totale de l'actif devient

$$A(1) = \left( A(0) - \sum_{k \in L_0} B_k(0) \right) \exp(r_1^{\text{PF}}) = \sum_{k \in L_0} B_k(0) (\ddot{a}_{x_k} - 1) \exp(r_1^{\text{PF}}),$$

où  $r_1^{\text{PF}}$  est le taux de rendement composé en continu dans le temps 1 réalisé sur le portefeuille d'actifs.<sup>24</sup> L'équation ci-dessus est obtenue rétrospectivement : en d'autres termes, il s'agit d'un report prospectif des actifs à l'aide des prestations réelles et du rendement réel des placements. On peut également obtenir une valeur pour  $A(1)$  de manière prospective :

<sup>23</sup> Nous supposons que cela est connu et corrigé. Dans la pratique, la mortalité systématique pourrait changer, et l'exploitant du régime commun de rentes viagères à paiements variables devrait ajuster la table de mortalité de temps à autre. Dans ce cas, les prestations devront être ajustées. Piggott et coll. (2005) fait cet ajustement par cohorte, tandis que Qiao et Sherris (2013) propose un ajustement commun pour tous les participants.

<sup>24</sup> Pour utiliser plutôt les taux annuels effectifs,  $\exp(r_t^{\text{PF}})$  doit être remplacé par  $(1 + \tilde{r}_t^{\text{PF}})$ , où  $\tilde{r}_t^{\text{PF}} = \exp(r_t^{\text{PF}}) - 1$  est le taux annuel effectif équivalant au taux composé en continu  $r_t^{\text{PF}}$ .

$$A(1) = \sum_{k \in \mathcal{L}_1} B_k(1) \ddot{a}_{x_{k+1}} = \sum_{k \in \mathcal{L}_1} (\alpha_1 B_k(0)) \ddot{a}_{x_{k+1}},$$

où  $\alpha_1$  est l'ajustement au temps 1 appliqué à la prestation au temps 0; c'est-à-dire  $B_k(1) = \alpha_1 B_k(0)$ . En termes simples, la valeur des prestations futures ajustées doit être égale à la valeur accumulée de l'actif. L'équation des valeurs rétrospectives et prospectives de  $A(1)$  s'exprime ainsi

$$\alpha_1 = \left( \frac{\sum_{k \in \mathcal{L}_0} B_k(0) (\ddot{a}_{x_k} - 1)}{\sum_{k \in \mathcal{L}_1} B_k(0) \ddot{a}_{x_{k+1}}} \right) \exp(r_1^{\text{PF}}),$$

qui peut être simplifiée davantage en utilisant la relation récursive entre  $\ddot{a}_{x_k}$  et  $\ddot{a}_{x_{k+1}}$  :

$$\ddot{a}_{x_k} - 1 = p_{x_k} \ddot{a}_{x_{k+1}} \exp(-h).$$

En effet, cette simplification donne la formule suivante :

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \left( \frac{\sum_{k \in \mathcal{L}_0} B_k(0) p_{x_k} \ddot{a}_{x_{k+1}}}{\sum_{k \in \mathcal{L}_1} B_k(0) \ddot{a}_{x_{k+1}}} \right) \times \exp(r_t^{\text{PF}} - h) \\ &= \text{ARM}_1 \times \text{ARI}_1. \end{aligned}$$

Cette formule précise que l'ajustement appliqué au temps 1 est le produit du facteur d'ajustement des résultats de mortalité au temps 1,  $\text{ARM}_1$ , et de l'ajustement des résultats de placement au temps 1,  $\text{ARI}_1$ . Cette justification est valable en tout temps, de sorte que l'ajustement temporel au temps  $t$  est désigné par

$$\alpha_t = \left( \frac{\sum_{k \in \mathcal{L}_{t-1}} B_k(t-1) p_{x_{k+t-1}} \ddot{a}_{x_{k+t}}}{\sum_{k \in \mathcal{L}_t} B_k(t-1) \ddot{a}_{x_{k+t}}} \right) \times \exp(r_t^{\text{PF}} - h),$$

menant à la règle suivante de mise à jour des prestations :

$$\begin{aligned} B_k(t) &= B_k(t-1) \times \left( \frac{\sum_{j \in \mathcal{L}_{t-1}} B_j(t-1) p_{x_{j+t-1}} \ddot{a}_{x_{j+t}}}{\sum_{j \in \mathcal{L}_t} B_j(t-1) \ddot{a}_{x_{j+t}}} \right) \times \exp(r_t^{\text{PF}} - h) \\ &= B_k(t-1) \times \text{ARM}_t \times \text{ARI}_t, \end{aligned} \quad (5)$$

pour le participant  $k$ . À noter que si chaque participant prend sa retraite au même âge  $x$ , l'ajustement des résultats de mortalité se simplifie pour

$$\text{ARM}_t = \frac{p_{x+t-1}}{p_{x+t-1}^*}, \quad \text{où } p_{x+t-1}^* = \frac{\sum_{j \in \mathcal{L}_t} B_j(t-1)}{\sum_{j \in \mathcal{L}_{t-1}} B_j(t-1)}, \quad (6)$$

qui est le taux de survie réel pondéré par le versement des prestations.

Ce cadre conceptuel pourrait être élargi en plusieurs dimensions (p. ex., groupe ouvert de participants, améliorations systématiques de la mortalité). Dans le présent rapport, nous nous concentrons sur les régimes communs fermés, mais rien n'empêche d'inclure les nouveaux participants dans l'ensemble des survivants. Pour ce faire, la valeur de l'actif devrait être ajustée en ajoutant au bassin les cotisations des nouveaux participants et en ajustant l'ensemble des survivants en conséquence.

### 3.2 EXEMPLE

Pour mieux comprendre le fonctionnement de ces régimes communs stylisés de rentes viagères à paiements variables, examinons maintenant un exemple numérique simple. Nous envisageons 100 nouveaux participants au temps 0, chacun âgé de 65 ans.

Supposons que la mortalité systématique est modélisée par la table CPM 2014 pour les femmes sans ajustements générationnels et que le taux de référence (composé en continu) est fixé à 4,5 %.<sup>25</sup> La valeur actuarielle actualisée de la rente de début de période associée à ces hypothèses est  $\ddot{a}_{65} = 14,3410$ .

Si chaque participant dépose 143 410 \$ dans le régime commun, ce qui porte l'actif total à l'origine à 14 341 000 \$, cette valeur initiale de l'actif permet à chaque participant de recevoir une prestation de

$$B_k(0) = \frac{143\,410}{14,3410} = 10\,000, \quad \forall k \in \mathcal{L}_0,$$

au départ. Après le versement de ces prestations, la valeur totale de l'actif chute à

$$14\,341\,000 - \sum_{k \in \mathcal{L}_0} B_k(0) = 14\,341\,000 - (100)(10\,000) = 13\,341\,000.$$

Cette somme est ensuite investie pendant un an dans un portefeuille dont le taux de rendement est incertain. Supposons que le taux de rendement composé en continu obtenu la première année est de  $r_1^{\text{PF}} = 3\%$ , ce qui donne une valeur d'actif au temps 1 de

$$A(1) = 13\,341\,000 \times \exp(0,03) = 13\,747\,294.$$

Supposons ensuite que cinq participants meurent au cours de la première année; la prestation après redistribution au temps 1 pour chaque participant survivant est donc exprimée comme suit :

$$B_k(1) = B_k(0) \frac{A(1)}{\sum_{j \in \mathcal{L}_1} B_j(0) \ddot{a}_{x_j+1}} = \frac{13\,747\,294}{(100 - 5)(14,0339)} = 10\,311, \quad \forall k \in \mathcal{L}_1,$$

où  $\ddot{a}_{66} = 14,0339$  selon la table de mortalité CPM 2014. Autrement dit, la prestation au temps 1 est la valeur de l'actif au temps 1 divisée entre les survivants (tout en tenant compte de leur nouveau facteur de rente et étant donné que tous les participants ont maintenant 66 ans).

Nous obtenons des ajustements identiques lorsque nous utilisons la formule élaborée à la section 3.1 :

$$\begin{aligned} \text{ARM}_1 &= \left( \frac{\sum_{k \in \mathcal{L}_0} B_k(0) p_{65} \ddot{a}_{66}}{\sum_{k \in \mathcal{L}_1} B_k(0) \ddot{a}_{66}} \right) = \left( \frac{0,9944}{\left(\frac{100-5}{100}\right)} \right) = 1,0467, \\ \text{ARI}_1 &= \exp(r_1^{\text{PF}} - h) = \exp(0,03 - 0,045) = 0,9851, \end{aligned}$$

menant à un facteur d'ajustement de  $\alpha_1 = \text{ARM}_1 \times \text{ARI}_1 = 1,0311$ , et une prestation de

$$B_k(1) = B_k(0) \times \alpha_1 = 10\,000 \times 1,0311 = 10\,311.$$

<sup>25</sup> Nous n'incluons pas les ajustements générationnels pour des raisons de commodité; les résultats ne sont pas touchés par cette simplification.

Même si le rendement des placements était inférieur au taux de référence – ce qui aurait dû entraîner une diminution des prestations au temps 1 – plus de participants que prévu sont décédés au cours de la première année. Cela entraîne ultimement un facteur d’ajustement supérieur à 1, ce qui signifie que les prestations au temps 1 sont plus élevées que celles versées au temps 0.

En appliquant la même logique de façon récursive, on peut obtenir la prestation pour chaque année et chaque participant lorsque la mortalité et le taux de rendement sont observés.

### 3.3 FACTEUR D’AJUSTEMENT POUR L’AMÉLIORATION SYSTÉMATIQUE DE LA MORTALITÉ

Comme il est mentionné plus haut, les équations de la section 3.1 pourraient être modifiées pour permettre des améliorations systématiques de la mortalité. Pour montrer l’impact de cette modification sur notre configuration de base, commençons par introduire une certaine notation. D’abord, la valeur actuarielle au temps  $t$  de la rente due est exprimée par  $\ddot{a}_{x_k}^{[t]}$  pour un participant âgé de  $x_k$ . De même, la probabilité de survie d’un an mesurée au temps  $t$  pour un participant âgé de  $x_k$  est exprimée par  $p_{x_k}^{[t]}$ .

Dans ce cas, le facteur d’ajustement de la mortalité devient

$$\text{ARM}_t = \left( \frac{\sum_{k \in \mathcal{L}_{t-1}} B_k(t-1) p_{x_{k+t-1}}^{[t-1]} \ddot{a}_{x_{k+t}}^{[t-1]}}{\sum_{k \in \mathcal{L}_t} B_k(t-1) \ddot{a}_{x_{k+t}}^{[t]}} \right).$$

La version modifiée de l’ajustement des résultats de mortalité contient des sommes de facteurs de rente sous les anciennes et les nouvelles hypothèses de mortalité, pondérées par le nombre de retraités à chaque âge et le montant de leurs prestations, ce qui tient compte de tout changement attendu de la mortalité systématique.

### 3.4 DISCUSSION SUR LA MISE EN COMMUN DE LA MORTALITÉ

Fait intéressant, la majeure partie des documents consultés porte sur l’effet de la mortalité (idiosyncrasique) sur le flux de prestations (voir, p. ex., Piggott et coll., 2005, Qiao et Sherris, 2013, Olivieri et Pittaco, 2020), en tenant moins compte de l’effet du taux de rendement réalisé sur le portefeuille d’actifs. Nous empruntons une voie différente : nous supposons au départ que la taille du portefeuille est suffisamment grande et que toutes les prestations de départ sont les mêmes pour que l’impact de la mise en commun de la mortalité potentiellement imparfaite soit négligeable.<sup>26,27</sup> Cela équivaut à supposer que le risque de mortalité idiosyncrasique est entièrement diversifié. Concrètement, cela signifie également que  $p_{x+t-1}^* = p_{x+t-1}$ , et que  $\text{ARM}_t = 1$  pour tous les temps  $t$  dans un bassin de participants fermé pour lequel tous les participants ont le même âge  $x$  à la création.

La réduction la plus importante possible des prestations en raison de la mortalité survient dans une année lorsqu’aucun des participants ne décède. Étant donné que les taux de mortalité prévus sont assez faibles au début de la retraite – surtout en comparaison avec la réduction potentielle des prestations en raison d’un krach boursier –  $\text{ARM}_t = 1$  ne peut sous-estimer de façon significative le risque de mortalité pour un groupe de participants plus jeunes. Cette hypothèse est quelque peu irréaliste dans les régimes communs fermés comptant des participants plus âgés, et nous recommandons de l’utiliser avec prudence pour évaluer le risque réel dans ces régimes. Toutefois, pour introduire la prestation à risque dans le contexte de régimes communs de rentes viagères à paiements variables, la

<sup>26</sup> Selon Sabin et Forman (2016), qui examinent des portefeuilles semblables, la volatilité des débours dépend presque exclusivement de la stratégie de placement dès que la participation est suffisamment élevée (c.-à-d. plus de 1 000 participants).

<sup>27</sup> Cette approche a également été utilisée par Bernhardt et Donnelly (2019) dans leur article sur les tontines modernes.

complication supplémentaire associée à un risque de mortalité est inutile, car elle n'aura qu'une incidence de second ordre sur nos résultats finaux.<sup>28</sup>

À partir de cette simplification, le rendement du portefeuille est la seule variable ayant une incidence sur le niveau des prestations dans les grands régimes communs. En utilisant une récursion simple, on peut exprimer le niveau de la prestation de l'équation (5) au temps  $t$  sous la forme

$$B_k(t) = B_k(0) \prod_{s=1}^t \exp(r_s^{\text{PF}} - h) = B_k(0) \exp\left(\sum_{s=1}^t r_s^{\text{PF}} - th\right). \quad (7)$$

L'équation (7) servira à comprendre l'évolution des prestations dans les sections 4.1 à 4.4 du présent rapport. À la section 4.5, nous examinerons une hypothèse de mortalité idiosyncrasique simple pour évaluer son incidence sur les grands et petits régimes communs à paiements variables.

---

<sup>28</sup> Les résultats de la section 4.5 montrent que la mortalité idiosyncrasique qui est suffisamment diversifiée et qui repose sur la bonne table de mortalité a une incidence minimale sur l'ajustement des prestations. Le rendement des actifs représente donc le principal facteur déterminant de l'ajustement des prestations pour les grands régimes communs.

## Section 4 : Prestations à risque dans des régimes communs de rentes viagères à paiements variables

Dans la présente section, nous appliquons le concept de la PaR au régime commun stylisé de rentes viagères à paiements variables abordé à la section 3. Nous commençons par effectuer une exploration analytique des deux mesures particulières des prestations à risque – la PaRm(5) et la PmaR(20) – décrites ci-dessus. Ensuite, à la section 4.2, nous procédons à des tests de sensibilité et à des analyses de robustesse pour déterminer si les deux mesures proposées résistent aux variations de certains intrants (c.-à-d. le taux de référence et la répartition de l'actif). La section 4.3 évalue l'impact de l'inflation sur les prestations et redéfinit la PaR en termes réels. Ensuite, dans la quatrième partie de cette section, nous discutons d'un autre test de robustesse dans lequel nous considérons une distribution du rendement de l'actif risqué un peu plus réaliste obtenue par la méthode bootstrap. Cette nouvelle hypothèse nous permet de commenter la robustesse des expressions analytiques présentées à la section 4.1. Enfin, dans la dernière sous-section, nous traitons de l'impact de l'inclusion du risque de mortalité idiosyncrasique dans le calcul de la PaR.

Encore une fois, nous insistons sur le fait que les deux mesures particulières de la PaR énoncées dans le présent rapport reposent sur des choix subjectifs, soit la budgétisation et la prise de décisions. Ces choix sont loin d'être uniques; en effet, rien n'empêche les utilisateurs finaux de créer leurs propres paramètres de la PaR qui correspondent à leur objectif. Il convient de noter que la mesure de la PaR sélectionnée à la fin pourrait aussi dépendre de la structure du régime commun.

### 4.1 EXPLORATION ANALYTIQUE

À des fins d'illustration, nous commençons notre analyse par le régime stylisé décrit à la section 3.1, en supposant qu'il s'adresse à un groupe fermé. Les participants se joignent au régime commun à 65 ans. Tous effectuent la même mise de fonds initiale  $A_k(0)$  dans le régime, pour  $k \in \mathcal{L}_0$ . Ces deux hypothèses égalisent les prestations de chaque participant :

$$B(t) \equiv B_k(t), \quad \forall k \in \mathcal{L}_t.$$

À la première étape de notre analyse, nous supposons que les rendements du portefeuille d'actifs composés en continu  $r_s^{\text{PF}}$  suivent une loi normale avec une moyenne de  $\nu \equiv \omega\mu + (1 - \omega)r$  et un écart-type de  $\zeta = \omega\sigma$ , où le  $\omega$  pourrait être grossièrement interprété comme la proportion investie dans l'actif risqué,  $\mu$  le rendement moyen de l'actif risqué,  $\sigma$  son écart-type et  $r$  le taux sans risque.<sup>29</sup>

Comme la somme des variables aléatoires normales indépendantes est également normale, nous réexprimons la prestation au temps- $t$  de l'équation (7) comme suit :

$$B(t) = B(0) \exp(R_t),$$

---

<sup>29</sup> Cette distribution approximative est obtenue en combinant le rendement brut de l'actif risqué (c.-à-d. un indice boursier dans ce cas) et le rendement brut de l'actif sans risque de sorte que,

$$\begin{aligned} r_t^{\text{PF}} &= \log(\omega e^{s_t} + (1 - \omega)e^r) \\ &\approx \omega s_t + (1 - \omega)r \end{aligned}$$

à l'aide d'une expansion de Taylor de premier ordre, où  $s_t$  est le rendement de l'actif risqué composé en continu. Si le rendement de l'actif risqué au temps  $t$  suit une loi normale avec une moyenne de  $\mu$  et un écart-type de  $\sigma$ , alors le rendement du portefeuille est approximativement normal avec une moyenne de  $\omega\mu + (1 - \omega)r$  et un écart-type de  $\omega\sigma$ .

où  $R_t$ , le rendement cumulé du portefeuille d'actifs supérieur au taux de référence, suit une loi normale de moyenne  $t(v - h) = t(\omega\mu + (1 - \omega)r - h)$  et un écart-type  $\sqrt{t}\zeta$ .

Dans la présente section, nous utilisons les paramètres suivants : un rendement moyen de l'actif risqué de 7 %, un écart-type de l'actif risqué de 15 % et taux sans risque de 2 %.<sup>30</sup> La proportion investie dans l'actif risqué est fixée à 50 %. Le taux de référence est établi au rendement du portefeuille prévu au départ, c'est-à-dire  $h = v$ . Nous supposons que chaque participant au régime commun de rentes viagères à paiements variables dépose 143 410 \$ dans le fonds. Le prix de la rente initiale est  $\ddot{a}_{65} = 14,3410$  en utilisant la table CPM 2014 pour les femmes sans ajustements générationnels, ce qui donne une prestation initiale de 10 000 \$.

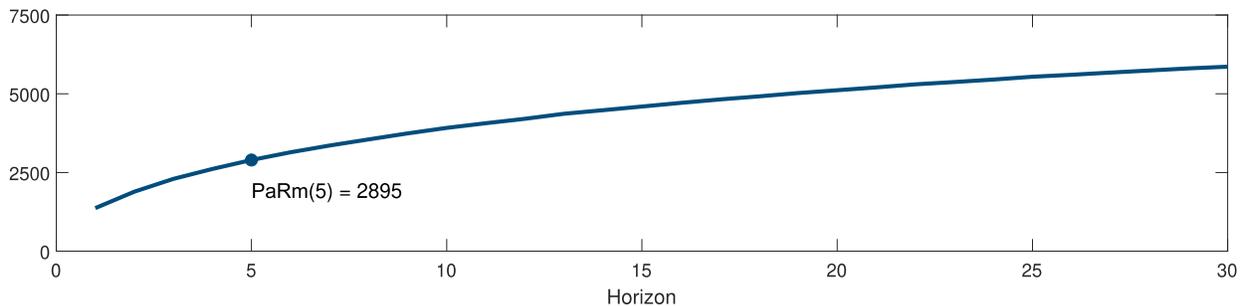
#### 4.1.1 PRESTATION À RISQUE MINIMALE

La PaR minimale – utilisée pour la budgétisation – est fondée sur la prestation minimale au cours des  $\tau$  prochaines années. Pour calculer sa valeur, nous devons donc trouver la fonction de répartition de la prestation actuelle,  $B(0)$ , moins le minimum,  $\underline{B}(\tau)$ , qui est le comparateur moins la statistique des prestations pour la PaR minimale.<sup>31</sup> En utilisant l'hypothèse de normalité énoncée ci-dessus, nous pouvons trouver la fonction de répartition de cette variable aléatoire sous forme semi-fermée à une intégrale près. La PaR minimale de cinq ans dans ce contexte est donc exprimée dans la formule suivante

$$\text{PaRm}(5) = F_{B(0) - \underline{B}(5)}^{-1}(0,975),$$

où la fonction de répartition de  $B(0) - \underline{B}(5)$ , exprimée par  $F_{B(0) - \underline{B}(5)}$ , est présentée à l'annexe A.1.<sup>32</sup>

**Figure 4**  
PRESTATION À RISQUE MINIMALE EN FONCTION DE L'HORIZON



Ce chiffre indique la prestation à risque minimale en fonction de l'horizon. Le niveau de la PaR est fixé à 97,5 % et le taux de référence représente le rendement attendu du portefeuille, c'est-à-dire 4,5 %. La moitié du portefeuille est investie dans l'actif risqué et l'autre moitié dans l'actif sans risque. Nous supposons que le retraité adhère au régime à 65 ans en y investissant 143 410 \$, de sorte que la prestation actuelle est fixée à 10 000 \$.

La figure 4 indique la mesure minimale de la PaR pour différents horizons. Pour un horizon de cinq ans – celui utilisé pour définir la PaRm(5) à la section 2 – la mesure est égale à 2 895 \$. Ce nombre signifie que, dans un des 40 scénarios futurs, un participant devrait s'attendre à ce que son pire déficit annuel de prestations au cours des cinq prochaines

<sup>30</sup> Ces chiffres sont conformes à ceux de l'économie canadienne. Entre 1990 et 2021, le rendement excédentaire moyen (incluant les dividendes) de l'indice composé S&P/TSX était d'environ 5 % et sa volatilité était de 15 %. En ajoutant le taux sans risque de 2 % au rendement excédentaire moyen, nous obtenons un rendement moyen de 7 % sur l'actif risqué.

<sup>31</sup> L'annexe B.1 présente une version différente de la PaR minimale pour laquelle le comparateur est fixé à une quantité exogène déterminée par les participants. Par exemple, ce montant pourrait représenter un niveau cible de prestations ou un repère externe.

<sup>32</sup> Dans la présente étude, nous nous appuyons sur des méthodes de quadrature pour obtenir cette fonction de répartition. La fonction de répartition est inversée numériquement en utilisant la méthode de Newton-Raphson pour obtenir la PaRm.

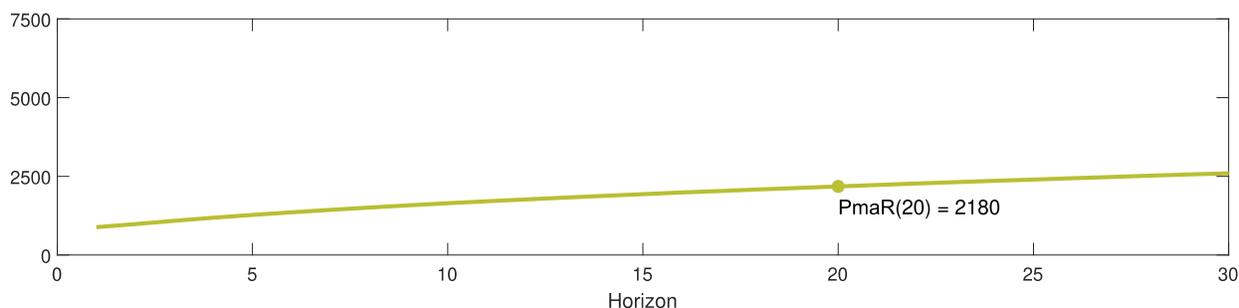
années (par rapport à la prestation actuelle de 10 000 \$) dépasse 2 895 \$. Dans la plupart des scénarios (39 fois sur 40), le pire déficit annuel des prestations sera inférieur à 2 895 \$, ce qui signifie que la prestation annuelle que reçoit le participant devrait dépasser 7 105 \$ pour chacune des cinq prochaines années dans ces scénarios.

L'horizon semble important dans ces circonstances. Pour de courts horizons, la PaR minimale varie, passant d'une valeur de 2 292 \$ pour un horizon de trois ans à 3 355 \$ pour un horizon de sept ans. Bien que nous ayons choisi un horizon de cinq ans, d'autres courts horizons pourraient aussi convenir dans ce contexte.<sup>33</sup>

#### 4.1.2 PRESTATION MOYENNE À RISQUE

La distribution de la prestation moyenne est plus complexe, car elle comprend une somme de variables aléatoires dépendantes. Lorsque l'on suppose que les rendements composés en continu suivent une loi normale, l'ajustement  $ARI_t$  des placements de chaque année suit une loi log-normale. Par conséquent, les ajustements cumulatifs de la prestation de chaque année dans l'équation (7) suivent également une loi log-normale (bien qu'ils ne soient pas indépendants). La somme ou la moyenne de tous les ajustements ne suit pas exactement une loi log-normale. Néanmoins, on a fait valoir dans les documents consultés qu'on peut établir une approximation de ces distributions au moyen de lois log-normales appariées au moment, soit l'approximation de Fenton-Wilkinson (voir Fenton, 1960, pour une description de la méthode et Dufresne, 2008, pour un examen des méthodes d'approximation pour des sommes de variables aléatoires log-normales).

**Figure 5**  
PRESTATION MOYENNE À RISQUE EN FONCTION DE L'HORIZON



Cette figure présente la prestation moyenne à risque en fonction de l'horizon. Le niveau de la PaR est fixé à 90 %, et le taux de référence correspond au rendement attendu du portefeuille, c'est-à-dire 4,5 %. La moitié du portefeuille est investie dans l'actif risqué et l'autre moitié dans l'actif sans risque. Nous supposons que le retraité adhère au régime à 65 ans en y investissant 143 410 \$, de sorte que la prestation actuelle est fixée à 10 000 \$.

L'annexe A.2 présente les expressions sous forme fermée pour les deux premiers moments de  $\bar{B}(\tau)$ . Il convient de noter que celles-ci sont obtenues de façon récursive. En supposant que la prestation moyenne  $\bar{B}(\tau)$  est exprimée au moyen d'une variable aléatoire log-normale avec paramètres  $\mu_{\bar{B}(\tau)}$  et  $\sigma_{\bar{B}(\tau)}$ , nous avons

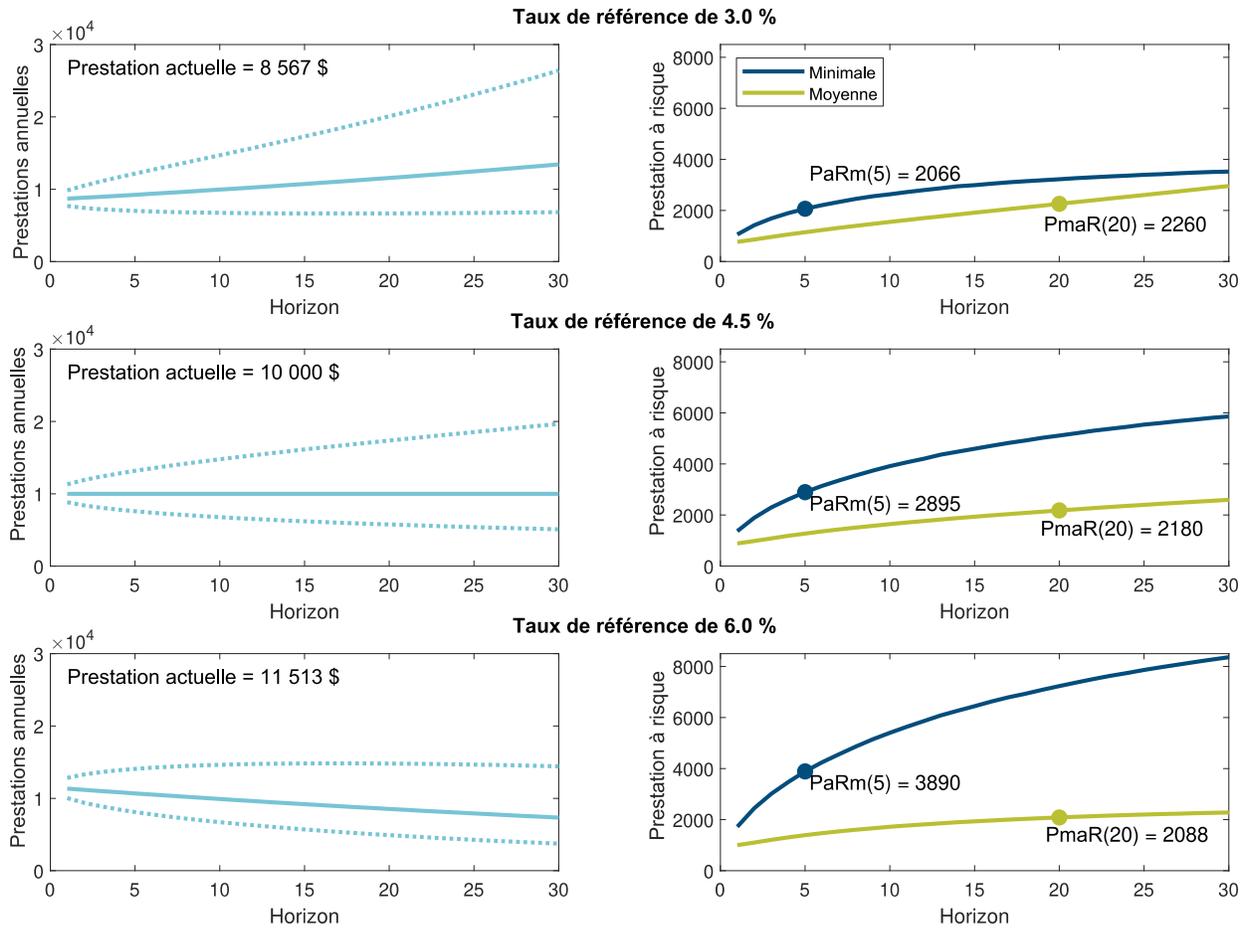
$$\begin{aligned} \text{PmaR}(20) &= F_{\mathbb{E}[\bar{B}(20)] - \bar{B}(20)}^{-1}(0,90) = \mathbb{E}[\bar{B}(20)] - F_{\bar{B}(20)}^{-1}(0,10) \\ &= \exp(\mu_{\bar{B}(20)} + \sigma_{\bar{B}(20)}^2/2) - \exp(\mu_{\bar{B}(20)} + \sigma_{\bar{B}(20)} \Phi^{-1}(0,10)). \end{aligned}$$

<sup>33</sup> Certaines observations tirées d'un récent rapport de la Society of Actuaries appuient un horizon de cinq ans dans le contexte de la budgétisation, bien que la préoccupation réelle de l'enquête concernait davantage les pertes forfaitaires que les baisses du revenu annuel. Voir Greenwald Research (2022) pour plus de détails.

Cette formule pour la PmaR(20) représente simplement la différence entre la moyenne et le 10<sup>e</sup> quantile d'une loi log-normale dont la moyenne et l'écart-type sont les mêmes que la moyenne des prestations moyennes sur 20 ans.<sup>34</sup>

Figure 6

ENTONNOIR DE DOUTE CONCERNANT LA PRESTATION ANNUELLE ET LA PRESTATION À RISQUE POUR DIFFÉRENTS TAUX DE RÉFÉRENCE



Les graphiques de gauche dans cette figure font état d'entonnoirs de doute quant aux prestations annuelles. Nous affichons la médiane (ligne continue) ainsi que les 5<sup>e</sup> et 95<sup>e</sup> quantiles (lignes pointillées) pour trois différents taux de référence : 3,0 % (graphique supérieur), 4,5 % (graphique du milieu) et 6,0 % (graphique inférieur). Les graphiques de droite de cette figure montrent la prestation à risque minimale au niveau de 97,5 % (lignes bleues) et la prestation moyenne à risque au niveau de 90 % (lignes vertes). Nous supposons une stratégie de répartition d'actifs constante (c.-à-d.  $\omega = 0,5$ ).

La figure 5 montre les prestations moyennes à risque pour différents horizons, en supposant un niveau de probabilité de 90 %. Les paramètres servant à produire cette figure sont les mêmes que ceux utilisés pour la figure précédente. Comme prévu, les PmaR sont inférieures à celles des prestations minimales indiquées à la figure 4. Sur un horizon de 20 ans, la prestation moyenne à risque de 90 % est de 2 180 \$, ce qui signifie que dans un scénario futur sur dix, nous nous attendons à ce que les participants perdent plus de 2 180 \$ par année par rapport à ce qu'ils devaient obtenir

<sup>34</sup> L'approximation log-normale est très précise dans notre contexte et elle donne des résultats en une fraction de seconde, ce qui est beaucoup plus rapide que les méthodes de force brute de Monte-Carlo qui pourraient être utilisées pour calculer la prestation à risque.

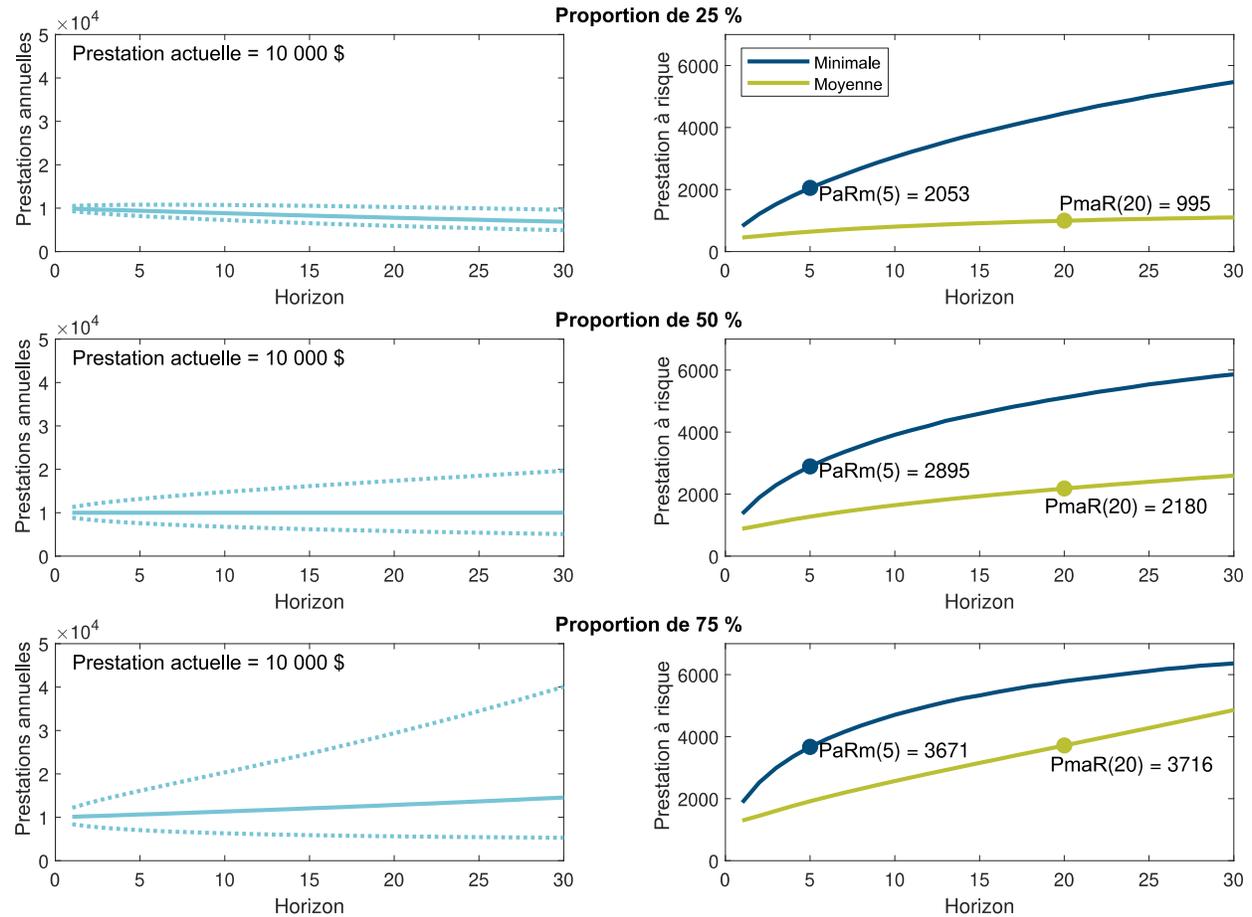
en moyenne. Autrement dit, il y a 10 % de chances que les participants perdent plus de 2 180 \$ par année en prestations en investissant dans ce régime commun.<sup>35</sup>

#### 4.2 TESTS DE SENSIBILITÉ ET ANALYSES DE ROBUSTESSE

La section 4.1 montre les PaR minimales et moyennes pour différents horizons, en mettant l'accent sur l'horizon de cinq ans pour la PaRm et l'horizon de 20 ans pour la PmaR. La présente section évalue l'impact d'autres hypothèses choisies dans le calcul ci-dessus; elle donne au lecteur un aperçu du comportement de la PaR par rapport à ses principaux intrants (c'est-à-dire le taux de référence et la stratégie de répartition de l'actif).

Figure 7

#### ENTONNOIR DE DOUTE CONCERNANT LA PRESTATION ANNUELLE ET LA PRESTATION À RISQUE POUR DIFFÉRENTES STRATÉGIES DE RÉPARTITION DE L'ACTIF



Les graphiques de gauche dans cette figure font état d'entonnoirs de doute quant aux prestations annuelles. Nous affichons la médiane (ligne continue) ainsi que les 5<sup>e</sup> et 95<sup>e</sup> quantiles (lignes pointillées). Nous le faisons pour trois stratégies différentes de répartition de l'actif (c.-à-d. la proportion de l'actif investi dans de l'actif risqué) : 25 % (graphique supérieur), 50 % (graphique du milieu) et 75 % (graphique inférieur). Les graphiques de droite de cette figure montrent la PaRm au niveau de 97,5 % (lignes bleues) et la PmaR au niveau de 90 % (lignes vertes). Nous supposons un taux de référence constant de 4,5 % dans toute cette figure.

<sup>35</sup> À l'instar de l'annexe B.1, l'annexe B.2 présente une version de la PmaR qui utilise un comparateur exogène.

À ce stade, nous insistons sur le fait que même si la réduction de la PaR peut être perçue comme une bonne chose, en général, cette mesure ne saisit qu'une dimension (c.-à-d. le risque de déficit). Il convient donc de faire preuve d'une extrême prudence lorsqu'on tire des conclusions générales de ces analyses de sensibilité, surtout du point de vue de la conception du régime.

#### 4.2.1 TAUX DE RÉFÉRENCE

Le taux de référence a une incidence importante sur les prestations annuelles versées aux retraités – un taux de référence plus faible réduit la prestation actuelle, mais accroît la probabilité de hausses futures des prestations, et vice versa.

Les graphiques de gauche de la figure 6 font état d'entonnoirs de doute (médiane ainsi que 5<sup>e</sup> et 95<sup>e</sup> quantiles) pour les prestations annuelles. Lorsque le taux de référence est faible (c.-à-d. 3,0 %), la prestation actuelle est également faible (environ 1 400 \$ de moins que le scénario de base de la section 4.1). Pour compenser cette prestation actuelle inférieure, la prestation a tendance à augmenter avec le temps; la prestation annuelle médiane passe à plus de 13 000 \$ après 30 ans. Un taux de référence de 4,5 % correspond à notre scénario de référence examiné à la section 4.1; dans l'ensemble, les prestations médianes sont constantes à 10 000 \$, c'est-à-dire la prestation actuelle. Pour un taux de référence de 6,0 %, nous constatons une tendance décroissante des prestations annuelles en moyenne. Il convient de souligner que cette tendance décroissante est compensée par une prestation actuelle plus élevée, qui se situe à 1 500 \$ au-dessus du scénario de base.

Les graphiques de droite de la figure 6 montrent des prestations à risque minimales (lignes bleues) et des prestations moyennes à risque (lignes vertes) pour différentes échéances. Il convient de noter que dans la figure 6, les comparateurs pour la PaRm et la PmaR sont ajustés dans chaque cas pour refléter les prestations; autrement dit,  $B(0)$  et  $\mathbb{E}[\bar{B}(20)]$  sont mis à jour pour être conformes au taux de référence sélectionné. Ces deux mesures sont exprimées pour les trois taux de référence étudiés dans la présente section (c.-à-d. 3,0 %, 4,5 % et 6,0 %). Les mesures de la PaRm sont relativement basses pour le faible taux de référence: la PaRm sur cinq ans est de 2 066 \$, ce qui donne une prestation minimale supérieure à 6 500 \$ dans environ 97,5 % des scénarios futurs au cours des cinq prochaines années. Lorsque le taux de référence est fixé à 4,5 % – notre scénario de référence – nous obtenons une PaR minimale plus élevée et qui augmente plus fortement en fonction de l'horizon que celle obtenue avec un taux de référence de 3,0 %. Plus précisément, pour un horizon de cinq ans, nous avons une PaRm d'environ 2 900 \$. Ce résultat est à prévoir : avec un taux de référence de 3,0 %, nous anticipons que le montant actuel plus bas sera compensé par des prestations futures plus élevées, tandis qu'un taux de référence de 4,5 % majore les prestations actuelles reçues par le participant, mais diminue la probabilité d'augmentations futures des prestations. Comme le comparateur de la PaRm représente la prestation actuelle, l'application d'un taux de référence plus faible force  $B(0)$  à être plus faible, ce qui réduit la mesure.

Le dernier cas (graphique inférieur droit de la figure 6) tient compte d'un taux de référence de 6,0 %. Dans ce cas, la prestation actuelle est élevée au départ, mais elle devrait diminuer en moyenne. En effet, la PaR minimale est de 3 890 \$ sur cinq ans. Par rapport à la prestation actuelle élevée de 11 513 \$, un participant risque de perdre beaucoup plus.

Les valeurs de la PmaR sont moins sensibles au choix des taux de référence que les valeurs de la PaRm; fait intéressant, elles oscillent entre 2 088 \$ et 2 260 \$. Ce résultat est un sous-produit de l'horizon de 20 ans choisi à la section 2. Un horizon plus long augmenterait l'incidence de la différence au chapitre des taux de référence, comme le montre la figure 6 : de faibles taux de référence donnent lieu à des PmaR élevées lorsque l'horizon est long (c.-à-d. 30 ans). Le taux de référence réduit permet de préserver les actifs en fin de vie, mais ce faisant, il sacrifie les prestations à court terme.

#### 4.2.2 RÉPARTITION DE L'ACTIF

Passons maintenant à la répartition de l'actif et à son incidence sur la prestation à risque. Plus précisément, nous modifions la proportion  $\omega$  investie dans l'actif risqué (qui est supposée être un indice boursier dans ce cas), tout en maintenant tous les autres facteurs à un niveau constant (y compris le taux de référence).

Les graphiques de gauche de la figure 7 font état d'entonnoirs de doute quant aux prestations annuelles pour trois proportions différentes : 25 % (graphique supérieur), 50 % (graphique du milieu) et 75 % (graphique inférieur). Comme on pouvait s'y attendre, la présence d'actifs plus risqués entraîne une plus grande incertitude quant au niveau des prestations : la largeur de l'entonnoir de doute est faible si seulement 25 % des actifs sont investis dans l'actif risqué; elle s'accroît sensiblement lorsque 75 % du portefeuille est investi dans l'actif risqué.

Les graphiques de droite de la figure 7 montrent les PaR minimales et moyennes pour différents horizons et pour les trois stratégies de répartition d'actifs susmentionnées. Comme prévu, un investissement moindre dans l'actif risqué à court terme donne lieu à des valeurs de PaR plus faibles. Pour la PaRm(5), la diminution de la répartition, de 50 % à 25 %, réduit la prestation à risque d'environ 800 \$; une augmentation de la répartition, de 50 % à 75 %, a l'effet contraire sur la mesure du risque – elle augmente de 800 \$ la PaRm(5).

La stratégie d'investissement influe grandement sur les PmaR sur 20 ans, plus que l'incidence du taux de référence de la PmaR(20). La mesure de l'intérêt diminue de 1 200 \$ lorsque la répartition de l'actif risqué est réduite de 50 % à 25 % et augmente d'environ 1 500 \$ lorsqu'elle est portée à 75 %.

L'investissement d'une plus petite proportion des actifs des participants dans l'actif risqué est clairement avantageux, car il réduit le niveau de la PaR dans la plupart des cas. Il y a toutefois un compromis : l'opération a également une incidence négative sur la hausse potentielle; par exemple, le 95<sup>e</sup> quantile de la distribution des prestations sur 30 ans est d'environ 10 000 \$ si  $\omega = 25\%$ , mais devient 40 000 \$ si  $\omega = 75\%$ .

#### 4.2.3 EFFETS COMBINÉS DU TAUX DE RÉFÉRENCE ET DE LA RÉPARTITION DE L'ACTIF

Les sections 4.2.1 et 4.2.2 font état de l'incidence du taux de référence et de la répartition de l'actif sur les mesures relatives aux prestations à risque, respectivement, et concluent que les prestations à risque minimales et les prestations moyennes à risque sont influencées par les changements apportés à ces hypothèses. Pourtant, lorsqu'on modifie la répartition de l'actif, il est difficile de comprendre si les PaR changent en raison de la croissance du profil de risque des prestations ou de la différence entre le rendement prévu du portefeuille d'actifs et le taux de référence qui influe sur la tendance générale des prestations futures. La présente section aborde cette question en examinant la PaR à titre de fonction de la répartition d'actifs  $\omega$  et de la soi-disant marge, définie comme la différence entre le rendement prévu du portefeuille d'actifs  $v$  et le taux de référence  $h$ .

Une marge de zéro signifie que le rendement prévu du portefeuille et le taux de référence sont égaux, ce qui donne lieu à des prestations médianes nivelées (comme celles présentées dans les graphiques du milieu des figures 6 et 7). Une marge positive sous-entend que les actifs donnent de meilleurs résultats en moyenne que le taux utilisé pour fixer la prestation actuelle et qu'en général, les prestations futures auront tendance à augmenter. Par contre, une marge négative suggère le contraire (c.-à-d. une prestation actuelle plus importante et des prestations futures moins élevées).

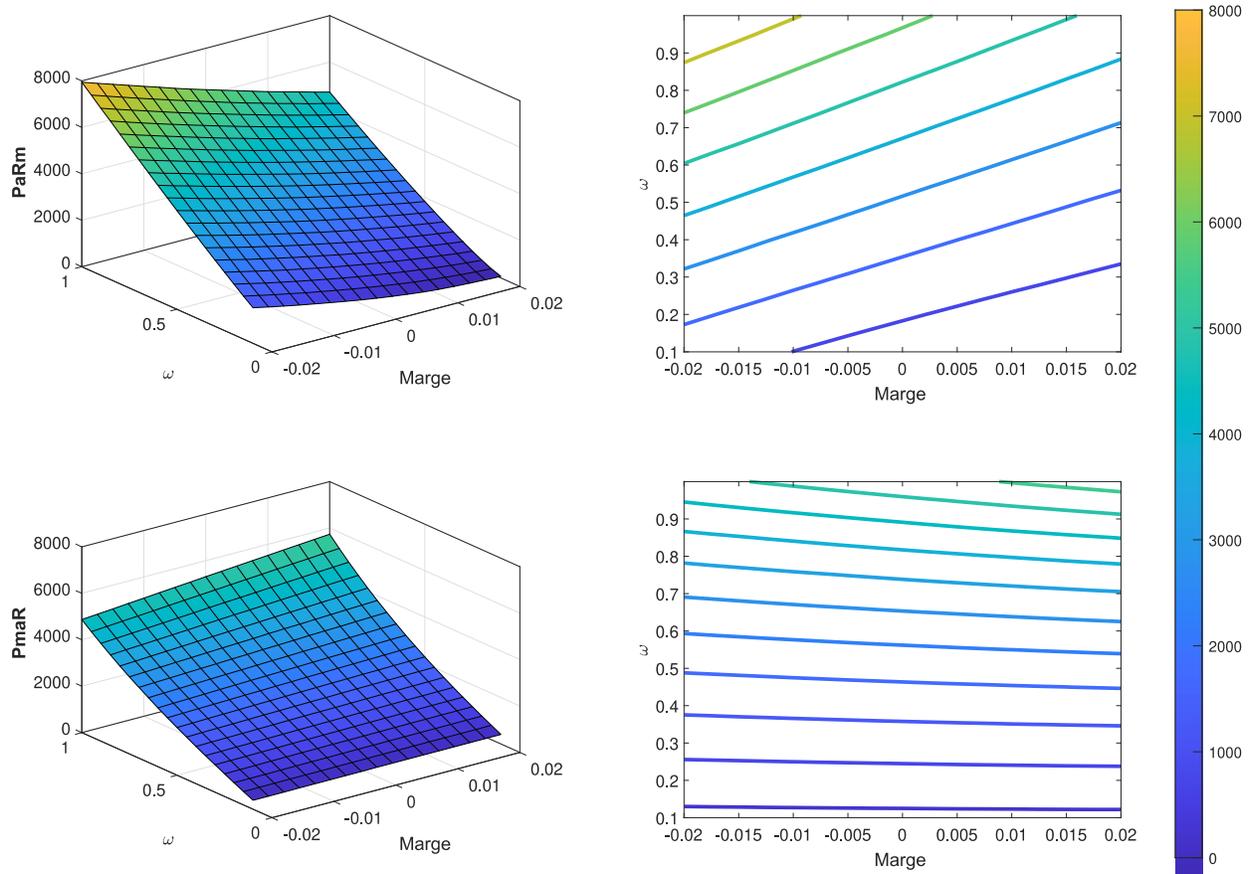
La variation de la marge et le changement de stratégie de répartition de l'actif touchent non seulement les flux de prestations, mais aussi les comparateurs utilisés pour calculer la PaRm et la PmaR. La prestation actuelle change par suite d'une variation de la marge, ce qui a une incidence sur la PaRm. Le comparateur de la PaRm est également touché puisque la prestation moyenne prévue est fonction à la fois de la marge et de la répartition de l'actif.

Les graphiques de gauche de la figure 8 indiquent les surfaces de la prestation à risque minimale et la prestation moyennes à risque pour différentes stratégies de répartition des actifs et des marges. La PaRm (graphique supérieur

gauche) utilise un horizon de cinq ans, tandis que la PmaR (graphique inférieur gauche) utilise un horizon de 20 ans, tous deux conformes aux définitions de la section 2. Les graphiques de droite de la figure 8 présentent des renseignements semblables à ceux des graphiques de gauche, mais d'une façon différente : les deux graphiques montrent des tracés de contour – des tranches constantes de la surface fabriquée sur un plan bidimensionnel – associés aux surfaces.

**Figure 8**

**SURFACES ET TRACÉS DE CONTOUR POUR LES PRESTATIONS À RISQUE MINIMALES ET PRESTATIONS MOYENNES À RISQUE POUR DIFFÉRENTES STRATÉGIES DE RÉPARTITION DE L'ACTIF ET MARGES ENTRE LE RENDEMENT PRÉVU DU PORTEFEUILLE D'ACTIFS ET LE TAUX DE RÉFÉRENCE**



Le graphique supérieur gauche (inférieur gauche) de cette figure présente la surface de la PaRm sur cinq ans (PmaR sur 20 ans) en fonction du paramètre  $\omega$  de répartition de l'actif et de la marge définie comme la différence entre le rendement prévu du portefeuille d'actifs et le taux de référence. Le graphique supérieur droit (inférieur droit) montre le tracé de contour associé au graphique supérieur gauche (inférieur gauche). Les contours sont définis comme des tranches constantes de la surface créées sur un plan bidimensionnel.

La PaRm(5) augmente en fonction du poids investi dans l'actif risqué  $\omega$  et diminue en fonction de la marge. Ce comportement est à prévoir :

1. Si le portefeuille comprend une plus grande proportion associée à l'actif risqué, les prestations futures sont moins certaines, ce qui entraîne des valeurs plus élevées des PaR minimales.
2. Une marge négative sous-entend un taux de référence plus élevé que le rendement prévu du portefeuille d'actifs, ce qui entraîne une diminution des prestations, toutes choses étant égales par ailleurs. Comme le comparateur de la PaRm correspond aux prestations actuelles, le fait de commencer par une valeur élevée des prestations et de s'attendre à une baisse semble pire – surtout dans le contexte de la budgétisation – que

de commencer par une prestation moindre et de s'attendre à une augmentation. Cela donne lieu à des valeurs plus élevées de la PaRm et à un risque de budgétisation accru pour les participants lorsque la structure intègre des réductions probables des prestations.

Fait intéressant, la PmaR sur 20 ans — utilisée comme outil décisionnel — se comporte de façon très différente. Pour les portefeuilles investis dans une moindre mesure dans l'actif risqué (c.-à-d. moins de 50 %), la PmaR(20) est pratiquement à l'abri des variations de la marge. Sur l'horizon de 20 ans, une prestation actuelle élevée suivie de prestations futures plus modestes équivaut en moyenne à une prestation actuelle faible suivie de prestations futures plus importantes. Cette conclusion est un dérivé du comparateur utilisé pour calculer la PmaR, c'est-à-dire la prestation moyenne au cours des 20 prochaines années.

Lorsque plus de la moitié du fonds est investi dans l'actif risqué, la PmaR tend à être plus élevée pour les marges positives importantes. Ce résultat est principalement attribuable à une augmentation du risque lié aux prestations imputable à une forte proportion du fonds investi dans l'actif risqué et au fait que les prestations tendent à être plus importantes lorsque la marge est élevée (c.-à-d. lorsque le taux de référence est faible).

### 4.3 TERMES NOMINAUX ET RÉELS

Certains participants pourraient manifester de l'intérêt pour comprendre leur pouvoir d'achat effectif et l'incidence de l'inflation sur leurs prestations. Il s'agit d'un facteur d'importance primordiale puisque les prestations nivelées, comme celles obtenues avec une rente à paiements fixes, réduisent le pouvoir d'achat du participant au fil des ans.

Heureusement, les définitions de la PaR présentées à la section 2 peuvent facilement être ajustées pour tenir compte de l'inflation. Plus précisément, la prestation au temps  $t$  en dollars du temps 0 (c.-à-d. en termes réels) est exprimée en la forme suivante :

$$B^*(t) = B(t) \exp\left(-\sum_{s=1}^t q_s\right),$$

où  $q_t$  est le taux d'inflation au temps  $t$ . Pour tenir compte de l'inflation, la PaR minimale de cinq ans dans l'équation (2) peut être adaptée de la façon suivante :

$$\text{PaRm}^*(5) = F_{\underline{B}^*(0)-\underline{B}^*(5)}^{-1}(0,975),$$

$$\text{où } \underline{B}^*(\tau) = \min_{t \in \{1, \dots, \tau\}} B^*(t).$$

De même, la prestation moyenne à risque sur 20 ans dans l'équation (3) est exprimée ainsi :

$$\text{PmaR}^*(20) = F_{\mathbb{E}[\bar{B}^*(20)]-\bar{B}^*(20)}^{-1}(0,9),$$

$$\text{où } \bar{B}^*(\tau) = \frac{1}{\tau} \sum_{t=1}^{\tau} B^*(t) \text{ et la prestation moyenne prévue en termes réels est } \mathbb{E}[\bar{B}^*(\tau)].$$

Pour illustrer l'impact de la prise en compte des prestations en termes réels de façon concise, nous supposons un taux d'inflation constant de 2 %, ce qui correspond à la cible de la Banque du Canada et à l'inflation moyenne entre 1990

et 2021 au Canada. En effet, la Banque du Canada vise à maintenir l'inflation à 2 % au milieu d'une cible d'inflation de 1 à 3 %.<sup>36</sup> Toutes les autres hypothèses sont les mêmes que celles de la section 4.1.

Nous examinons sept taux de référence différents, de 3,0 % à 6,0 %, avec des augmentations de 0,5 %. Pour chaque taux de référence, nous calculons la prestation actuelle (toujours en utilisant 143 410 \$ comme actif à court terme appartenant à chaque participant), les rentes viagères moyennes (c.-à-d. au cours des 50 prochaines années), leur écart-type et les deux mesures de la PaR introduites à la section 2, en termes tant nominaux que réels.

Ces résultats sont présentés au tableau 1. Tout d'abord, comme prévu, il existe un lien positif entre la prestation actuelle et le taux de référence. Les rentes viagères moyennes ont un rapport négatif avec le taux de référence : en moyenne, de faibles taux de référence font augmenter les prestations et des taux de référence élevés se traduisent par des tendances négatives dans les prestations. L'écart-type suit la même tendance : des taux de référence moins élevés entraînent des rentes viagères plus élevées et des écarts-types plus élevés des prestations. Ces conclusions sont valides en termes tant nominaux que réels, bien que les moyennes réelles des rentes viagères et les écarts-types soient inférieurs à ceux obtenus avec les prestations nominales.

**Tableau 1**

**PRESTATION À RISQUE EN FONCTION DU TAUX DE RÉFÉRENCE EN TERMES NOMINAUX ET RÉELS**

Taux de référence	Prestation actuelle	Termes nominaux				Termes réels			
		Moyenne	Écart-type	PaRm(5)	PmaR(20)	Moyenne	Écart-type	PaRm*(5)	PmaR*(20)
3,0 %	8 567	13 942	3 937	2 066	2 260	8 106	2,068	2 619	1 755
3,5 %	9 035	12 741	3 513	2 327	2 235	7 562	1 877	2 907	1 741
4,0 %	9 513	11 684	3 142	2 603	2 208	7 080	1 709	3 211	1 725
4,5 %	10 000	10 752	2 818	2 895	2 180	6 652	1 560	3 534	1 708
5,0 %	10 496	9 932	2 534	3 209	2 150	6 271	1 430	3 870	1 689
5,5 %	11 001	9 208	2 286	3 540	2 119	5 933	1 314	4 216	1 670
6,0 %	11 513	8 569	2,068	3 890	2 088	5 631	1 212	4 584	1 650

Ce tableau présente les prestations actuelles, les statistiques sur la prestation viagère moyenne (c.-à-d. au cours des 50 prochaines années) et les mesures de la prestation à risque en termes nominaux et réels. La PaRm(5) et la PmaR\*(5) utilisent un niveau de 97,5 % et la PaRm(20) et la PmaR\*(20) utilisent un niveau de 90 %. Nous supposons une stratégie de répartition d'actifs constante (c.-à-d.  $\omega = 0,5$ ). Les valeurs en dollars réels sont obtenues en dollars au temps 0.

La mesure de la PaRm en termes réels augmente également en fonction du taux de référence. De faibles taux de référence génèrent une augmentation des tendances des prestations et une probabilité moindre de faibles prestations par rapport aux prestations actuelles (c.-à-d. le comparateur dans le contexte de la PaRm). Pour les taux de référence élevés, c'est le contraire. La PaRm(5) en termes réels est supérieure à la PaRm en termes nominaux, car l'inflation réduit le pouvoir d'achat des participants au fil du temps, ce qui abaisse leurs prestations en termes réels.

Les résultats du tableau 1 pourraient avoir certaines répercussions budgétaires pour les participants : de faibles taux de référence entraînent un risque moindre au chapitre des prestations (surtout dans l'extrémité gauche), ce qui se traduit par de faibles valeurs de la PaR en termes réels. En effet, la tendance à la hausse des prestations annule une partie de la perte de pouvoir d'achat en raison de l'inflation positive.

En ce qui concerne la PmaR(20), des taux de référence moins élevés entraînent des mesures du risque légèrement plus élevées, en termes tant nominaux que réels. Toutefois, l'écart entre toutes les mesures de la prestation moyenne

<sup>36</sup> Pour comprendre le risque associé aux variations du taux d'inflation, il faut ajouter un modèle d'inflation à leur cadre. L'inflation fait effectivement partie intégrante de la plupart des générateurs de scénarios économiques proposés depuis les années 1980 (voir, par exemple, Wilkie, 1986, 1995; Ahlgrim et coll., 2005; Bégin, 2021).

à risque semble plutôt faible en fonction du taux de référence. En effet, comme nous l'avons déjà mentionné, une prestation actuelle élevée suivie de prestations futures moins élevées devrait être quelque peu semblable, en moyenne, à une faible prestation actuelle suivie de prestations futures plus élevées. Cette conclusion ne varie pas pour la prestation moyenne à risque en termes réels.

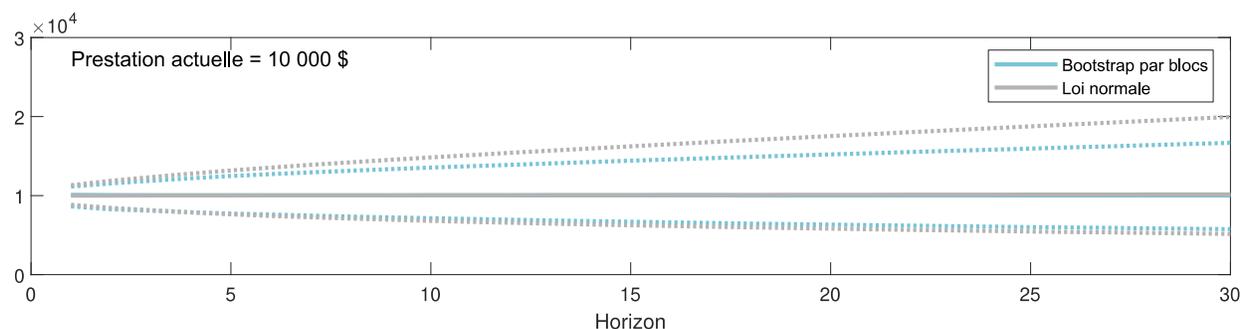
#### 4.4 ÉVALUATION DE LA ROBUSTESSE DES RENDEMENTS NORMAUX

Une hypothèse clé du calcul de la PaR est la distribution utilisée pour le rendement annuel de l'actif risqué. À la section 4 jusqu'à présent, nous nous sommes fondés sur une loi normale avec un rendement moyen de 7 % et un écart-type de 15 %, conformément à l'économie canadienne entre 1990 et 2021. La normalité est une hypothèse courante pour les rendements annuels composés en continu dans le contexte des régimes de retraite, mais il ne s'agit manifestement pas de la seule hypothèse utilisée dans les documents consultés.<sup>37</sup>

Pour évaluer l'incidence de cette hypothèse sur nos résultats, nous choisissons une autre hypothèse non paramétrique à des fins de comparaison. Plus précisément, nous nous appuyons sur la méthode bootstrap par blocs pour générer un rendement de l'actif risqué. La raison d'être de cette démarche est de s'appuyer sur les données antérieures et de rééchantillonner—bootstrap—les résultats antérieurs pour créer de nouvelles séries de rendements (voir l'annexe C pour plus de détails). Nous utilisons 100 000 réplifications dans notre calcul.<sup>38</sup>

Figure 9

#### ENTONNOIR DE DOUTE SUR LES PRESTATIONS ANNUELLES POUR LA MÉTHODE BOOTSTRAP PAR BLOCS ET LES RENDEMENTS NORMAUX



Cette figure fait état d'entonnoirs de doute pour les prestations annuelles. Nous affichons la médiane (ligne continue) ainsi que les 5<sup>e</sup> et 95<sup>e</sup> quantiles (lignes pointillées). Nous procédons ainsi pour deux types différents de rendement risqué des actifs. Tout d'abord, nous supposons que les rendements proviennent de la méthode bootstrap par blocs expliquée à l'annexe C d'après les rendements composés du S&P/TSX. Deuxièmement, nous supposons une loi normale avec moyenne de 7 % et un écart-type de 15 %, comme aux sections 4.1, 4.2 et 4.3. Le taux de référence est fixé à 4,5 %. La moitié du portefeuille est investie dans l'actif risqué et l'autre moitié dans l'actif sans risque. Nous supposons que le retraité adhère au régime à 65 ans en y investissant 143 410 \$, de sorte que la prestation actuelle est fixée à 10 000 \$.

La figure 9 imite les graphiques de gauche des figures 6 et 7 : elle présente l'entonnoir de doute annuel obtenu avec la méthode du bootstrap par blocs et celui obtenu avec des variables aléatoires normales indépendantes et identiquement distribuées (iid) (c.-à-d. la méthode expliquée à la section 4.1). Fait intéressant, il existe une légère différence entre les deux flux de prestations aléatoires : l'hypothèse normale débouche sur un entonnoir de doute

<sup>37</sup> Si les rendements composés en continu suivent une loi normale, les taux annuels effectifs (bruts) suivent une loi log-normale.

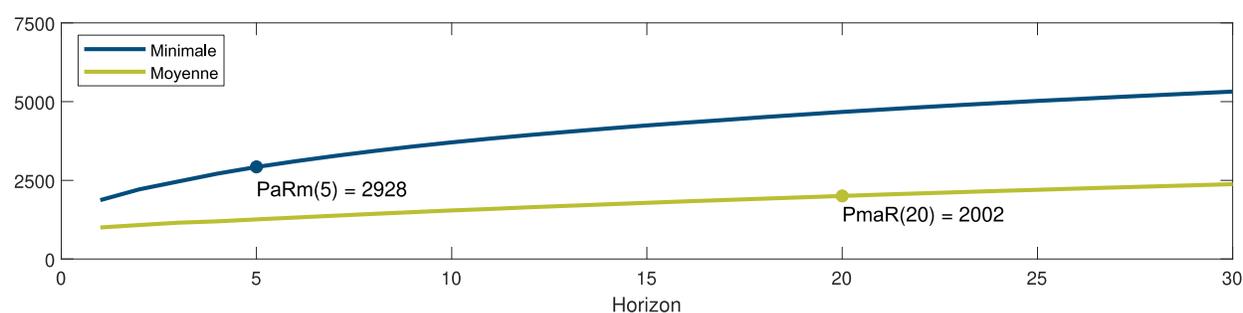
<sup>38</sup> Les PaRm et PmaR sont obtenues en évaluant empiriquement les équations (2) et (3) à partir des 100 000 trajectoires de prestations générées par la simulation de Monte-Carlo. Les trajectoires de prestations sont obtenues en appliquant l'équation (7) à chaque trajectoire d'actif risqué simulée.

plus large que celui obtenu par la méthode bootstrap. Ce résultat est quelque peu contraire à l'intuition, car on s'attendrait à ce que les rendements réalisés aient des extrémités plus épaisses que celles que suppose la normalité (voir, par exemple, la figure 15 à l'annexe C).

Cette intuition serait exacte si les rendements étaient vraiment iid; cependant, les rendements annuels composés du S&P/TSX présentent une autocorrélation négative (environ  $-20\%$ ), ce qui signifie que les rendements annuels positifs ont tendance à être suivis de rendements annuels négatifs, et vice versa. Cette autocorrélation négative, lorsqu'elle est agrégée, signifie moins de risque dans le flux de prestations et donc, des entonnoirs de doute plus étroits. Il convient toutefois de noter que l'écart entre les 5<sup>e</sup> quantiles indiqués à la figure 9 – bootstrap par blocs – et fondés sur une loi normale – est minimale (surtout lorsqu'on le compare à la différence entre les 95<sup>e</sup> quantiles), ce qui signifie que ce changement de loi ne devrait pas avoir d'incidence importante sur nos mesures de la PaR.

**Figure 10**

#### PRESTATION À RISQUE POUR LES RENDEMENTS SELON LA MÉTHODE BOOTSTRAP PAR BLOCS



Cette figure indique la prestation à risque minimale (ligne bleue) et la prestation moyenne à risque (ligne verte) en fonction de l'horizon. Le niveau de la PaRm est fixé à 97,5 %, le niveau de la PmaR est établi à 90 %, et le taux de référence est fixé à 4,5 %. La moitié du portefeuille est investie dans l'actif risqué et l'autre moitié dans l'actif sans risque. Nous supposons que le retraité adhère au régime à 65 ans en y investissant 143 410 \$, de sorte que la prestation actuelle est fixée à 10 000 \$. Les rendements de l'actif risqué sont générés au moyen de la méthode bootstrap par blocs expliquée à l'annexe C.

La figure 10 présente les PaR minimales et moyennes obtenues à partir des rendements selon la méthode bootstrap; ces valeurs sont pratiquement identiques à celles présentées aux figures 4 et 5. Cela signifie que les résultats obtenus selon la normalité aux sections 4.1 à 4.3 sont résistants à l'hypothèse de distribution du rendement de l'actif risqué et que les expressions d'analyse dérivées à l'annexe B et à la section 4.1 pourraient quand même servir de lignes directrices légitimes et pratiques dans des contextes réalistes.

#### 4.5 INCIDENCE DE LA MORTALITÉ IDIOSYNCRASIQUE

À la section 3.4, nous n'avons supposé aucune mise à jour du risque de mortalité et des prestations dérivées de cette hypothèse. Nous souhaitons maintenant évaluer l'impact de cette hypothèse en l'assouplissant. Pour ce faire et par souci de simplicité, nous ne tenons compte que du risque de mortalité idiosyncrasique dans la présente étude.<sup>39</sup> Si nous supposons que tous les participants ont le même âge et que le montant initial de leur actif est le même — hypothèses utilisées jusqu'à présent — nous appliquons la règle de mise à jour des prestations suivante de l'équation (6) :

<sup>39</sup> Le risque systématique de mortalité est également pertinent, mais hors de la portée du présent rapport. Pour tenir compte de ce risque, les utilisateurs doivent se fonder sur des tables de mortalité déterministes ou des modèles de mortalité stochastiques permettant des améliorations de la longévité (voir Lee et Carter, 1992; Cairns et coll., 2006, à titre d'exemples de tels modèles de mortalité).

$$B(t) = B(t-1) \frac{p_{x+t-1}}{p_{x+t-1}^*} \exp(r_t^{\text{PF}} - h), \quad (8)$$

où  $p_{x+t-1}^* = \frac{\sum_{k \in \mathcal{L}_t} B(t-1)}{\sum_{k \in \mathcal{L}_{t-1}} B(t-1)} = \frac{n(\mathcal{L}_t)}{n(\mathcal{L}_{t-1})}$  et  $n(A)$  représentent le nombre d'éléments dans l'ensemble  $A$  (c.-à-d. la cardinalité). Pour tenir compte de la mortalité idiosyncrasique, nous devons donc faire le suivi des participants dans  $\mathcal{L}_t$  pour  $t \in \{0, 1, \dots\}$ . Supposons un groupe de  $N$  participants tel que  $\mathcal{L}_0 = \{1, 2, \dots, N\}$ . Au moyen de la récursion, nous pouvons ensuite définir  $\mathcal{L}_t$  à partir de  $\mathcal{L}_{t-1}$  en faisant le suivi des défunts et des survivants. Par exemple, si le  $k^{\text{e}}$  participant est vivant au temps  $t-1$  (c.-à-d.  $k \in \mathcal{L}_{t-1}$ ), il y a deux possibilités pour son statut au moment  $t$  :

1. Ils survivront au moins jusqu'au temps  $t$  avec probabilité de  $p_{x+t-1}$ ; dans ce cas,  $k \in \mathcal{L}_t$ .
2. Ils mourront entre  $t-1$  et  $t$  avec probabilité de  $q_{x+t-1} = 1 - p_{x+t-1}$ ; dans ce cas,  $k \notin \mathcal{L}_t$ .

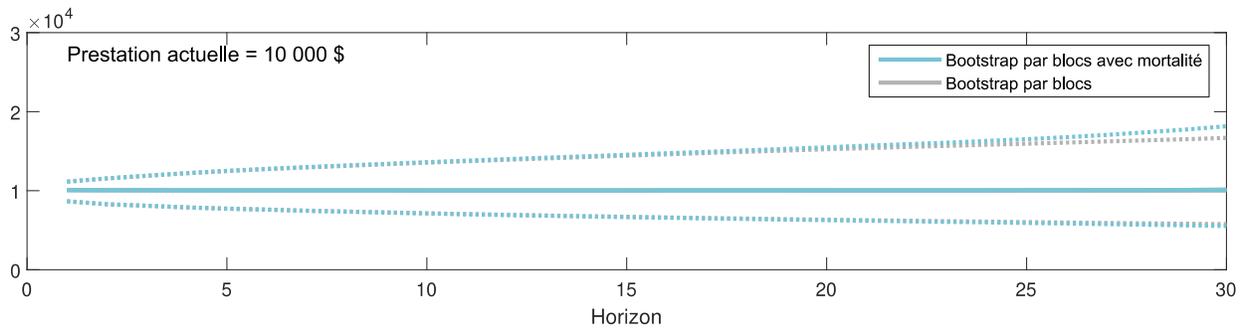
Ce comportement rappelle une variable aléatoire de Bernoulli. En effet, si  $k \in \mathcal{L}_{t-1}$ , alors

$$\begin{cases} k \in \mathcal{L}_t & \text{avec la probabilité } p_{x+t-1} \\ k \notin \mathcal{L}_t & \text{avec la probabilité } 1 - p_{x+t-1} \end{cases},$$

où le succès (premier résultat) est la survie et l'échec (deuxième résultat) est la mort. En utilisant cette justification, nous produisons 100 000 scénarios de mortalité pour saisir l'incertitude de la mortalité et nous les utilisons de concert avec l'équation (8) pour obtenir des scénarios de flux de prestations, comme dans le processus expliqué dans la note de bas de page 38.<sup>40</sup>

**Figure 11**

#### ENTENNOIR DE DOUTE DES PRESTATIONS ANNUELLES POUR LES RENDEMENTS SELON LA MÉTHODE BOOTSTRAP PAR BLOCS AVEC MORTALITÉ IDIOSYNCRATIQUE



Cette figure fait état d'entonnoirs de doute pour les prestations annuelles. Nous affichons la médiane (ligne continue), de même que les 5<sup>e</sup> et 95<sup>e</sup> quantiles (lignes pointillées), pour deux types d'hypothèse de mortalité différents. Premièrement, nous supposons un risque de mortalité idiosyncrasique comme il est expliqué à la section 4.5. Deuxièmement, nous ne supposons aucun risque de mortalité. Le taux de référence est fixé à 4,5 %. La moitié du portefeuille est investie dans l'actif risqué et l'autre moitié dans l'actif sans risque. Nous supposons que le retraité adhère au régime commun à 65 ans avec un actif de 143 410 \$; la prestation actuelle est donc fixée à 10 000 \$. Les rendements de l'actif risqué sont générés à l'aide de la méthode bootstrap par blocs. La taille actuelle du régime commun est fixée à 100 participants.

La figure 11 présente des entonnoirs de doute pour les prestations annuelles (c.-à-d. la médiane ainsi que les 5<sup>e</sup> et 95<sup>e</sup> quantiles de la distribution des prestations) pour deux hypothèses de mortalité différentes et pour le rendement

<sup>40</sup> Il est très facile de produire des variables aléatoires de Bernoulli avec probabilité  $p$ . En effet, il suffit d'utiliser un nombre aléatoire uniforme (continu) par rapport à  $[0, 1]$ , disons  $U$ ; ensuite, le succès est obtenu si  $U \leq p$ , et l'échec si  $U > p$ .

de l'actif risqué simulé selon la méthode bootstrap. Premièrement, nous supposons le risque de mortalité idiosyncrasique expliqué ci-dessus et nous obtenons des prestations en utilisant l'équation (8). Deuxièmement, nous ne supposons aucun risque de mortalité, comme cela est fait aux sections 4.1, 4.2, 4.3 et 4.4 et présenté à l'équation (7). Dans cette illustration, nous supposons un très petit groupe de 100 participants dont l'âge initial est 65 ans. Les médianes dans les deux cas sont pratiquement identiques et elles demeurent à 10 000 \$ (c.-à-d. la prestation actuelle). Pourtant, le flux de prestations permet une variabilité accrue lorsque la mortalité idiosyncratique est présente, en particulier aux âges plus avancés (c.-à-d. après environ 20 ans suivant l'instauration); cette situation est attendue puisque les participants plus âgés ont des probabilités de décès plus élevées, ce qui entraîne une plus grande variabilité des prestations. Il n'est pas étonnant que les 5<sup>e</sup> quantiles soient quelque peu semblables, ce qui signifie que les faibles prestations ne sont pas radicalement différentes lorsque la mortalité idiosyncrasique est prise en compte – et cela vaut même aux âges plus avancés.

La figure 12 montre la prestation à risque minimale et la prestation moyenne à risque pour différents horizons, encore une fois en utilisant 100 participants au départ et une prestation actuelle de 10 000 \$. Fait intéressant, ce graphique est presque identique à celui de la figure 10; l'estimation de la PaRm (5) est de 2 943 \$ lorsque l'on tient compte de la mortalité, soit seulement 15 \$ de plus que la PaRm(5) présentée à la figure 10 (c.-à-d. sans mortalité). La PmaR(20) montre un comportement similaire : elle est de 2 028 \$ lorsque la mortalité est présente dans le modèle et de 2 002 \$ lorsqu'elle ne l'est pas. Ces observations sous-entendent que le risque de mortalité idiosyncrasique est une considération de second ordre dans les régimes communs de rentes viagères à paiements variables pour les âges inférieurs à 95 ans, conformément aux conclusions de Sabin et Forman (2016) et à la conjecture de la section 3.4.

**Tableau 2**

**PRESTATION À RISQUE EN FONCTION DE LA TAILLE INITIALE DE LA POPULATION ET DE L'ÂGE ACTUEL DES PARTICIPANTS**

Taille initiale de la population	PaRm(5)				PmaR(20)
	À 65 ans	À 75 ans	À 85 ans	À 95 ans	À 65 ans
10	2 992	3 101	3 572	5 099	2 258
50	2 949	2 972	3 101	3 734	2 051
100	2 943	2 956	3 030	3 402	2 028
250	2 933	2 936	2 971	3 132	2 011
500	2 932	2 937	2 955	3 042	2 009
1 000	2 931	2 935	2 945	2 986	2 005
∞ (sans mortalité)	2 928	2 928	2 928	2 928	2 002

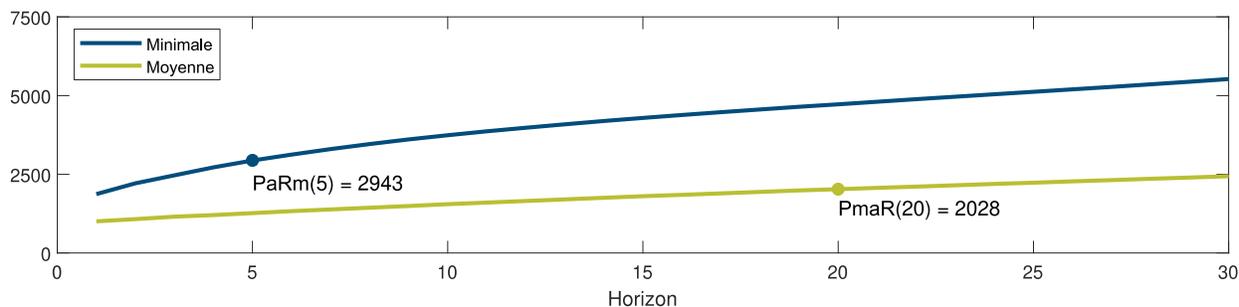
Ce tableau présente les prestations à risque minimales et prestations moyennes à risque en fonction de la taille initiale de la population. Le niveau de la PaRm est fixé à 97,5 %, le niveau de la PmaR est établi à 90 %, et le taux de référence est fixé à 4,5 %. La moitié du portefeuille est investie dans l'actif risqué et l'autre moitié dans l'actif sans risque. Nous supposons que la prestation actuelle est fixée à 10 000 \$. Ce tableau suppose des âges de départ différents pour les participants lors du calcul de la PaRm(5): 65, 75, 85 et 95 ans.

À partir des mêmes hypothèses, le tableau 2 complète l'information présentée à la figure 12. Plus précisément, il présente la PaRm(5) à 65, 75, 85 et 95 ans et la PmaR(20) à 65 ans pour différentes tailles initiales de population et une prestation actuelle de 10 000 \$. Pour les participants âgés de 65 et 75 ans, la taille de la population ne semble pas avoir d'incidence sur les estimations de la PaRm(5) : pour les grandes cohortes, les PaRm minimales sont les mêmes que celles calculées sans risque de mortalité et pour les petites cohortes, l'augmentation de la mesure de la PaRm(5) est minime. Pour les participants plus âgés, la taille du régime commun importe davantage : pour les participants âgés de 95 ans, la PaR double presque pour les régimes communs de dix participants. Comme prévu, la PaRm(5) diminue lorsque la taille augmente. Nous supposons que cette situation s'aggrave à mesure que les participants vieillissent et dépassent 95 ans, ce qui n'est pas possible compte tenu des tendances actuelles en matière

d'amélioration de la mortalité. En effet, le maintien de vastes régimes communs ouverts est primordial pour diversifier le risque de mortalité idiosyncrasique.<sup>41</sup>

**Figure 12**

**PRESTATION À RISQUE POUR LES RENDEMENTS SELON LA MÉTHODE BOOTSTRAP PAR BLOCS AVEC MORTALITÉ IDIOSYNCRASIQUE**



Cette figure indique la prestation à risque minimale (ligne bleue) et la prestation moyenne à risque (ligne verte) en fonction de l'horizon. Le niveau de la PaRm est fixé à 97,5 %, le niveau de la PmaR est établi à 90 % et le taux de rendement de référence prévu du portefeuille, à 4,5 %. La moitié du portefeuille est investie dans l'actif risqué et l'autre moitié dans l'actif sans risque. Nous supposons que le retraité adhère au régime à 65 ans en y investissant 143 410 \$, de sorte que la prestation actuelle est fixée à 10 000 \$. Cette figure suppose un risque de mortalité idiosyncrasique.

L'impact de l'inclusion de la mortalité aux âges plus avancés et aux petits régimes communs (fermés) est palpable. Il convient de noter que dans les groupes fermés de participants, la constitution d'un petit groupe est une question de temps : à un moment donné, le groupe deviendra plus petit à mesure que les participants mourront. Une meilleure façon de traiter les petits groupes consiste peut-être à créer des groupes ouverts qui permettent aux participants de différents âges d'adhérer au régime chaque année. Cette solution comporte des défis supplémentaires (p. ex., l'équité entre les générations, des règles de mise à jour des prestations plus compliquées). Pourtant, elle permettrait de régler les problèmes liés à la mortalité idiosyncrasique.

Un autre aspect important de la mortalité qu'il ne faut pas perdre de vue est l'impact du risque de mortalité systématique. Même si ce risque ne fait pas l'objet d'un examen officiel dans le rapport, il pourrait avoir une incidence importante sur les prestations des participants et sur les mesures de la PaR. Comme il est mentionné dans la note de bas de page 39, un examen adéquat du risque de mortalité systématique nécessite un modèle qui tient compte de la mortalité générationnelle.<sup>42</sup>

<sup>41</sup> Bernhardt et Donnelly (2021) étudient la question de la taille des groupes de participants et de la stabilité du revenu dans un article récent. Ils fournissent également des conseils sur la taille du groupe commun.

<sup>42</sup> D'éventuels problèmes d'antisélection pourraient également générer un risque de mortalité systématique supplémentaire. Pour plus de détails sur l'antisélection dans les régimes communs de rentes viagères à paiements variables, voir Valdez et coll. (2006)

## Section 5 : Mot de la fin et travaux futurs

Daykin a fait remarquer en 2004 que [traduction] « l'avenir repose probablement sur l'élaboration de formes différentes de partage des risques entre les pensionnés et les fournisseurs de rentes » (Daykin, 2004), ce qui signifie que les produits et les régimes de rente futurs transféreront probablement plus de souplesse et de risque aux participants qu'auparavant. Au cours des deux dernières décennies, nous avons été témoins de nombreuses avancées en ce sens avec l'adoption de nouvelles lois autorisant les régimes communs de rentes viagères à paiements variables, leur lancement sur le marché et la publication de plusieurs documents de recherche sur le sujet.

À mesure que ces nouveaux régimes communs deviennent réalité, les actuaires et les promoteurs de régimes doivent être en mesure de comprendre les risques qui s'y rattachent. Ils doivent également efficacement communiquer le risque aux participants pour que ces derniers puissent prendre des décisions pertinentes au sujet de leur revenu de retraite. Cela est très difficile en pratique, car (1) les participants ont tendance à être analphabètes au plan financier (voir, p. ex., Lusardi et Mitchell, 2011), et (2) les actuaires ont de la difficulté à communiquer lorsqu'ils traitent avec des auditoires non spécialisés (voir, p. ex., SOA, 2002).

Le présent rapport aborde une partie de cette question en proposant un nouvel ensemble de mesures pour la communication avec les participants et l'information à leur fournir. Plus précisément, nous avons suggéré deux applications pertinentes du concept de prestation à risque : la prestation à risque minimale pour la budgétisation et la prestation moyenne à risque pour la prise de décisions. Nous avons également évalué leur comportement lorsque les facteurs utilisés dans leur calcul sont modifiés (p. ex., l'horizon, le taux de référence, la stratégie de répartition de l'actif, la distribution du rendement de l'actif risqué et la mortalité idiosyncrasique). Les mesures ont été testées dans le contexte des régimes communs de rentes viagères à paiements variables; toutefois, ces mesures de la PaR pourraient également être utilisées dans d'autres contextes où les prestations sont inconnues et fluctuantes. Cela comprend des stratégies de prélèvement pour les comptes individuels et les rentes non indexées ou indexées qui ne suivent pas l'inflation. Nous réservons ces applications pour de futures recherches.

Le présent rapport constitue une première tentative de communiquer aux participants des renseignements sur les risques; il reste encore beaucoup de travail à faire pour rendre ces régimes communs accessibles au grand public et assurer leur succès.

Dans le rapport, nous avons relevé certaines limites liées aux mesures proposées. Il convient de souligner que l'utilisation de la PaR dans d'autres contextes que la communication et l'information pourrait être mal avisée, car elle ne dit pas tout. Cela ne signifie toutefois pas qu'elle ne peut pas être utilisée de concert avec d'autres mesures – en saisissant d'autres dimensions du risque pertinentes pour les participants – pour déterminer les caractéristiques optimales de conception du régime commun (p. ex., la politique relative au taux de référence et les dispositions de lissage).<sup>43,44</sup> Nous réservons ces questions intéressantes pour des recherches futures.

---

<sup>43</sup> Dans le rapport, nous avons examiné un taux de référence constant, mais il serait possible d'envisager en pratique un taux de référence variable qui pourrait être lié aux attentes de rendement nominal ou réel. D'une part, les ajustements du taux de référence peuvent introduire un élément supplémentaire de volatilité des prestations d'une année à l'autre. Par ailleurs, le fait de ne pas ajuster le taux de référence lorsque les attentes en matière de rendement changent peut réduire l'équité entre les cohortes.

<sup>44</sup> Le lissage désigne la comptabilisation différée des gains et pertes au titre des prestations versées. La comptabilisation retardée pourrait donner plus de temps aux participants pour ajuster leur consommation aux variations de leur revenu de retraite. Néanmoins, elle peut aussi introduire des transferts de valeur entre les participants (voir, p. ex., Cui et coll., 2011; Kocken, 2012). Le lissage peut également nuire à la capacité du régime commun d'attirer de nouveaux participants.

## Remerciements

Les chercheurs expriment leur profonde gratitude à ceux sans qui le projet n'aurait pu être mené à bien : les membres du Groupe chargé de la surveillance du projet pour leur travail diligent de supervision, d'examen et de révision du présent rapport pour en assurer l'exactitude et la pertinence.

Membres du Groupe chargé de la surveillance du projet :

Gavin S. Benjamin, FSA, FICA  
David R. Cantor, ASA, EA, CFA, FRM  
Jean-Pierre Canuel, FSA, FICA  
Douglas P. Chandler, FSA, FICA  
Stephen A. Eadie, FSA, FICA  
Richard K. Fullmer, CFA, MSc  
Hrvoje Lakota, FSA, FICA, CFA  
Dany Pineault, FSA, FICA

Institut de recherche de la Society of Actuaries :

Steven C. Siegel, ASA, MAAA, actuaire de recherche à la SOA  
Barbara Scott, administratrice principale de recherche

Institut canadien des actuaires :

Esteban Rivera, gestionnaire de projet, recherche et pratique professionnelle

Les auteurs reconnaissent le soutien à la recherche de Nikhil Kapoor.

## Annexe A : Démonstrations

### A.1 LE COMPARETEUR MOINS LA RÉPARTITION DES PRESTATIONS MINIMALES

Supposons que le comparateur dans le contexte de la PaR minimale est la prestation actuelle  $B(0)$ , de sorte que la variable aléatoire d'intérêt est  $B(0) - \underline{B}(\tau)$ .

À partir de

$$\underline{B}(\tau) = \min_{t \in \{1, \dots, \tau\}} B(t),$$

nous avons

$$\begin{aligned} F_{B(0) - \underline{B}(\tau)}(b) &= \mathbb{P}(B(0) - \underline{B}(\tau) \leq b) = \mathbb{P}(\underline{B}(\tau) \geq B(0) - b) \\ &= \mathbb{P}((B(1) \geq B(0) - b) \wedge \dots \wedge (B(\tau) \geq B(0) - b)), \end{aligned}$$

parce que si le minimum est supérieur à  $B(0) - b$ , chaque prestation doit être supérieure à  $B(0) - b$ . En remplaçant les prestations par leur définition, on pourrait les réécrire comme suit :

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}((B(1) \geq B(0) - b) \wedge \dots \wedge (B(\tau) > B(0) - b)) \\ &= \mathbb{P}\left(\left(r_1^{\text{PF}} \geq \log(B(0) - b) - \log(B(0)) + h\right) \wedge \left(r_2^{\text{PF}} \geq \log(B(0) - b) - \log(B(0)) + 2h + r_1^{\text{PF}}\right) \right. \\ &\quad \left. \wedge \dots \wedge \left(r_\tau^{\text{PF}} \geq \log(B(0) - b) - \log(B(0)) + \tau h - r_1^{\text{PF}} - \dots - r_{\tau-1}^{\text{PF}}\right)\right). \end{aligned}$$

Ce calcul de probabilité pourrait être exprimé sous forme d'une intégrale de dimension  $\tau$  :

$$\int_{K_1}^{\infty} \int_{K_2 - r_1^{\text{PF}}}^{\infty} \dots \int_{K_\tau - r_1^{\text{PF}} - \dots - r_{\tau-1}^{\text{PF}}}^{\infty} \left( \prod_{t=1}^{\tau} \phi(r_t^{\text{PF}}; \nu, \zeta) \right) dr_\tau^{\text{PF}} \dots dr_2^{\text{PF}} dr_1^{\text{PF}},$$

où  $\phi(x; m, s)$  est la fonction de densité de probabilité d'une variable aléatoire normale dont la moyenne  $m$  et l'écart-type  $s$  sont évalués à  $x$ . De plus,  $K_t = \log(B(0) - b) - \log(B(0)) + th$ .

Nous pouvons évaluer cette expression numériquement par quadrature ou simulation de Monte-Carlo.

### A.2 LE COMPARETEUR MOINS LA RÉPARTITION DES PRESTATIONS MOYENNES

Réécrivons la prestation moyenne ainsi :

$$\begin{aligned} \bar{B}(\tau) &= \frac{B(0)}{\tau} \left( \sum_{s=1}^{\tau} \exp \left( \sum_{u=1}^s r_u^{\text{PF}} - sh \right) \right) = \frac{B(0)}{\tau} \sum_{s=1}^{\tau} \exp \left( \sum_{u=1}^s \tilde{r}_u^{\text{PF}} \right) \\ &= \frac{B(0)}{\tau} \left( e^{\tilde{r}_1^{\text{PF}}} \left( 1 + e^{\tilde{r}_2^{\text{PF}}} \left( 1 + e^{\tilde{r}_3^{\text{PF}}} \left( 1 + e^{\tilde{r}_4^{\text{PF}}} (1 + \dots) \right) \right) \right) \right), \end{aligned}$$

où, dans ce cas, chaque rendement supérieur au taux de référence,  $\tilde{r}_u^{\text{PF}} = r_u^{\text{PF}} - h$ , suit une loi normale de moyenne de  $\nu - h$  et d'écart-type  $\zeta$ . Ils sont aussi indépendants les uns des autres.

La valeur prévue de  $\bar{B}(\tau)$  peut être retrouvée de façon récursive en raison de l'indépendance. À partir de  $Y_{\tau+1} = 1$ , nous pouvons définir  $Y_s = 1 + e^{\tilde{r}_s^{\text{PF}}} Y_{s+1}$  pour  $s = 2, \dots, \tau - 1$ . Ensuite, l'espérance de  $Y_s$  est

$$\mathbb{E}[Y_s] = \mathbb{E}\left[1 + e^{\tau_s^{\text{PF}}} Y_{s+1}\right] = 1 + e^{(v-h) + \frac{\zeta^2}{2}} \mathbb{E}[Y_{s+1}].$$

L'espérance de  $\bar{B}(\tau)$  est donc exprimée par

$$\mathbb{E}[\bar{B}(\tau)] = \frac{B(0)}{\tau} \mathbb{E}[Y_1], \quad \text{où } \mathbb{E}[Y_1] = e^{(v-h) + \frac{\zeta^2}{2}} \mathbb{E}[Y_2].$$

Le deuxième moment non centré est obtenu de la même façon, par récursion :

$$E[Y_s^2] = \mathbb{E}\left[\left(1 + e^{\tau_s^{\text{PF}}} Y_{s+1}\right)^2\right] = 1 + 2e^{(v-h) + \frac{\zeta^2}{2}} \mathbb{E}[Y_{s+1}] + e^{2(v-h) + 2\zeta^2} \mathbb{E}[Y_{s+1}^2],$$

dont le

$$\mathbb{E}[\bar{B}(\tau)^2] = \left(\frac{B(0)}{\tau}\right)^2 \mathbb{E}[Y_1^2], \quad \text{où } \mathbb{E}[Y_1^2] = e^{2(v-h) + 2\zeta^2} \mathbb{E}[Y_2^2].$$

La variance est donc obtenue sous la forme  $\text{Var}[\bar{B}(\tau)] = \mathbb{E}[\bar{B}(\tau)^2] - \mathbb{E}[\bar{B}(\tau)]^2$ , et les paramètres  $\mu_{\bar{B}(\tau)}$  et  $\sigma_{\bar{B}(\tau)}^2$  sont obtenus par appariement au moment, en résolvant les équations suivantes :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\bar{B}(\tau)] &= \exp\left(\mu_{\bar{B}(\tau)} + \frac{\sigma_{\bar{B}(\tau)}^2}{2}\right), \\ \text{Var}[\bar{B}(\tau)] &= (\exp(\sigma_{\bar{B}(\tau)}^2) - 1) \exp(2\mu_{\bar{B}(\tau)} + 2\sigma_{\bar{B}(\tau)}^2). \end{aligned}$$

Rappelez-vous que pour la prestation moyenne à risque, le comparateur est la prestation moyenne  $\mathbb{E}[\bar{B}(\tau)]$ . La fonction de répartition d'intérêt est donc la suivante :

$$F_{\mathbb{E}[\bar{B}(\tau)] - \bar{B}(\tau)}(b) = \mathbb{P}(\mathbb{E}[\bar{B}(\tau)] - \bar{B}(\tau) \leq b) = \mathbb{P}(\bar{B}(\tau) \geq \mathbb{E}[\bar{B}(\tau)] - b) = 1 - F_{\bar{B}(\tau)}(\mathbb{E}[\bar{B}(\tau)] - b),$$

qui peut être réécrit en fonction de la fonction de répartition de  $\bar{B}(\tau)$ . Notons que cette dernière fonction de répartition est facile à calculer, car  $\bar{B}(\tau)$  est présumé (approximativement) log-normal.

## Annexe B : Comparateurs exogènes

### B.1 REDÉFINITION DE LA PRESTATION À RISQUE MINIMALE ET LA PRESTATION MOYENNE À RISQUE AVEC COMPARATEURS EXOGÈNES

Dans la présente annexe, nous examinons une définition légèrement différente des prestations à risque minimales et prestations moyennes à risque qui tiennent compte des comparateurs exogènes établis par les participants. Cette autre définition de la prestation à risque pourrait être utile si les participants ont une cible en tête ou un repère externe.

#### B.1.1 PRESTATION À RISQUE MINIMALE AVEC COMPARATEUR EXOGÈNE

Plutôt que de recourir au niveau actuel des prestations  $B(0)$  comme comparateur, nous utilisons un montant exogène de  $K$  dans la présente annexe. En supposant que la prestation minimale sur un horizon de  $\tau$  années soit encore exprimée par  $\underline{B}(\tau)$ , le pire déficit qui en résulte sur cet horizon dans un seul scénario est  $K - \underline{B}(\tau)$ . Pour un horizon de cinq ans – comme celui proposé à la section 2 – nous obtenons la mesure suivante :

$$\text{PaRm}_e(5) \equiv \text{PaR}_{97,5\%}[K - \underline{B}(5)] = F_{K - \underline{B}(5)}^{-1}(0,975),$$

si le niveau de probabilité est maintenu à 97,5 %.

Pour calculer sa valeur, nous devons maintenant trouver la fonction de répartition du comparateur exogène,  $K$ , moins le minimum,  $\underline{B}(5)$ . À l'aide de l'hypothèse de normalité de la section 4.1, nous pouvons trouver la répartition du comparateur de cette variable aléatoire sous forme semi-analytique, à une intégrale près. Ce calcul est en effet très semblable à celui présenté à l'annexe A.1 et omis par souci d'espace.

#### B.1.2 PRESTATION MOYENNE À RISQUE AVEC COMPARATEUR EXOGÈNE

Comme dans le cas ci-dessus, nous remplaçons la prestation moyenne prévue,  $\mathbb{E}[\bar{B}(\tau)]$ , par un montant exogène de  $K$ , produisant une nouvelle mesure qui est exprimée comme suit :

$$\text{PmaR}_e(20) \equiv \text{PaR}_{90\%}[K - \bar{B}(20)] = F_{K - \bar{B}(20)}^{-1}(0,9),$$

tout en supposant encore une fois un niveau de probabilité de 90 % et un horizon de 20 ans. Heureusement, les équations élaborées à la section 4.1.2 peuvent être adaptées pour tenir compte de ce nouveau comparateur :

$$\text{PmaR}_e(20) = K - F_{\bar{B}(\tau)}^{-1}(0,10) = K - \exp\left(\mu_{\bar{B}(20)} + \sigma_{\bar{B}(20)} \Phi^{-1}(0,10)\right).$$

### B.2 EXEMPLES AVEC COMPARATEURS EXOGÈNES

Pour illustrer les différentes définitions de la PaR de l'annexe B.1, nous réexécutons les tests des sections 4.2.1 et 4.2.2 sur la robustesse du taux de référence et de la répartition de l'actif, respectivement. Cela devrait suffire pour que le lecteur puisse comprendre les différences entre les mesures de l'annexe B.1 et celles de la section 2.

#### B.2.1 TAUX DE RÉFÉRENCE

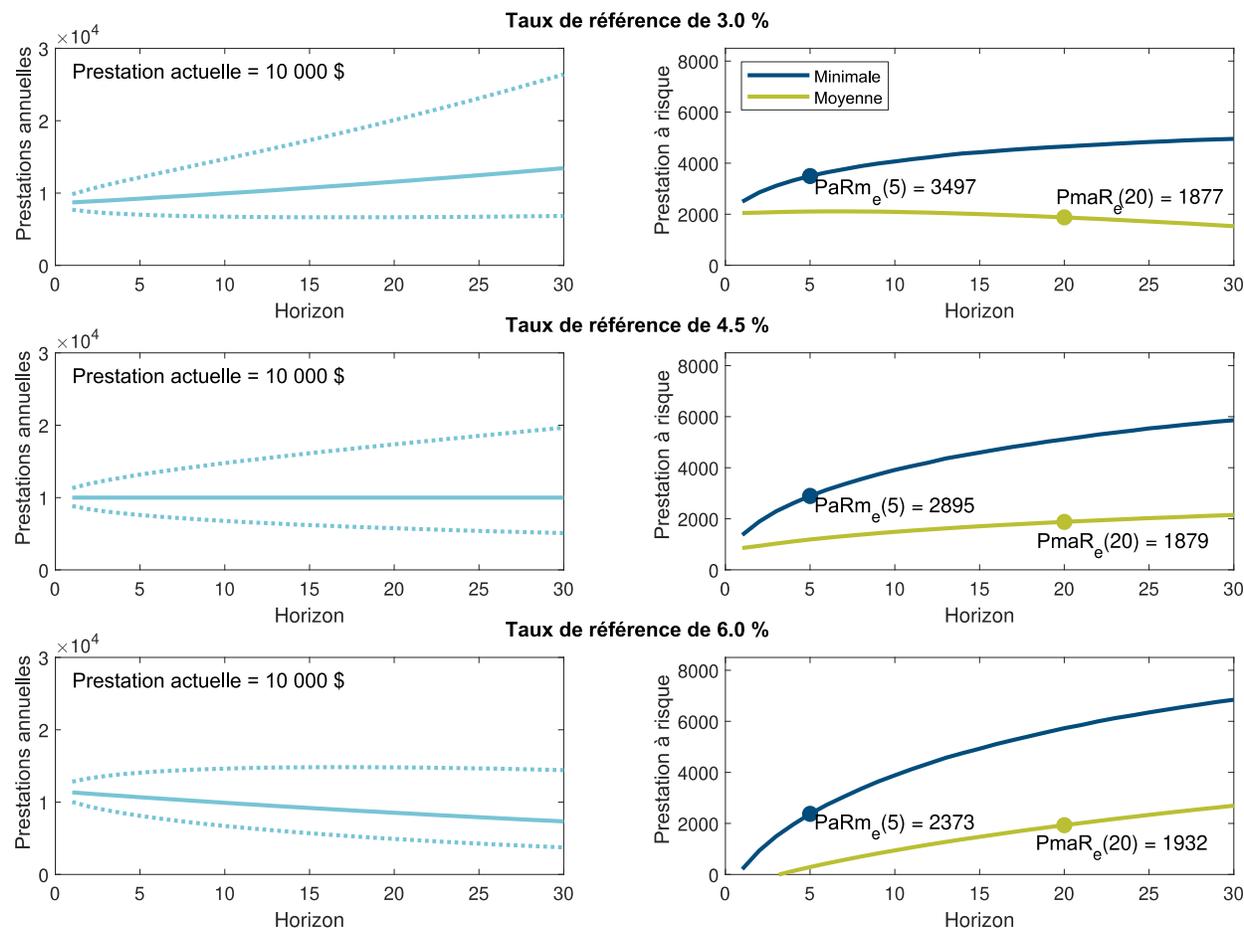
Les graphiques de gauche de la figure 13 font état d'entonnoirs de doute (médiane ainsi que 5<sup>e</sup> et 95<sup>e</sup> quantiles) pour les prestations annuelles; ces graphiques sont identiques aux graphiques de gauche de la figure 6.

Les graphiques de droite de la figure 13 montrent les PaRm (lignes bleues) et PmaR (lignes vertes) avec un comparateur exogène de 10 000 \$ et pour différentes échéances. Ces deux mesures sont de nouveau exprimées pour

les trois taux de référence (3,0 %, 4,5 % et 6,0 %). Il est intéressant de noter que la relation entre la PaRm avec comparateur exogène de 10 000 \$ et le taux de référence est l'inverse de celle indiquée à la figure 6 : la mesure diminue lorsque le taux de référence augmente, et vice versa. Il s'agit d'un dérivé de la réduction des prestations futures  $B(t)$  lorsque le taux de référence est faible, ce qui se traduit par une prestation minimale moins élevée au cours des cinq prochaines années et un déficit plus important par rapport au comparateur fixe,  $K$ .

Figure 13

ENTONNOIR DE DOUTE ANNUEL ET PRESTATION À RISQUE AVEC COMPARATEUR EXOGÈNE DE 10 000 \$ ET POUR DES TAUX DE RÉFÉRENCE DIFFÉRENTS



Les graphiques de gauche dans cette figure font état d'entonnoirs de doute quant aux prestations annuelles. Nous affichons la médiane (ligne continue) ainsi que les 5<sup>e</sup> et 95<sup>e</sup> quantiles (lignes pointillées). Pour trois différents taux de référence : 3,0 % (graphique supérieur), 4,5 % (graphique du milieu) et 6,0 % (graphique inférieur). Les graphiques de droite de cette figure montrent la PaRm au niveau de 97,5 % (lignes bleues) et la PmaR au niveau de 90 % (lignes vertes), tous deux utilisant 10 000 \$ comme comparateur exogène. Nous supposons une stratégie de répartition d'actifs constante (c.-à-d.  $\omega = 0,5$ ).

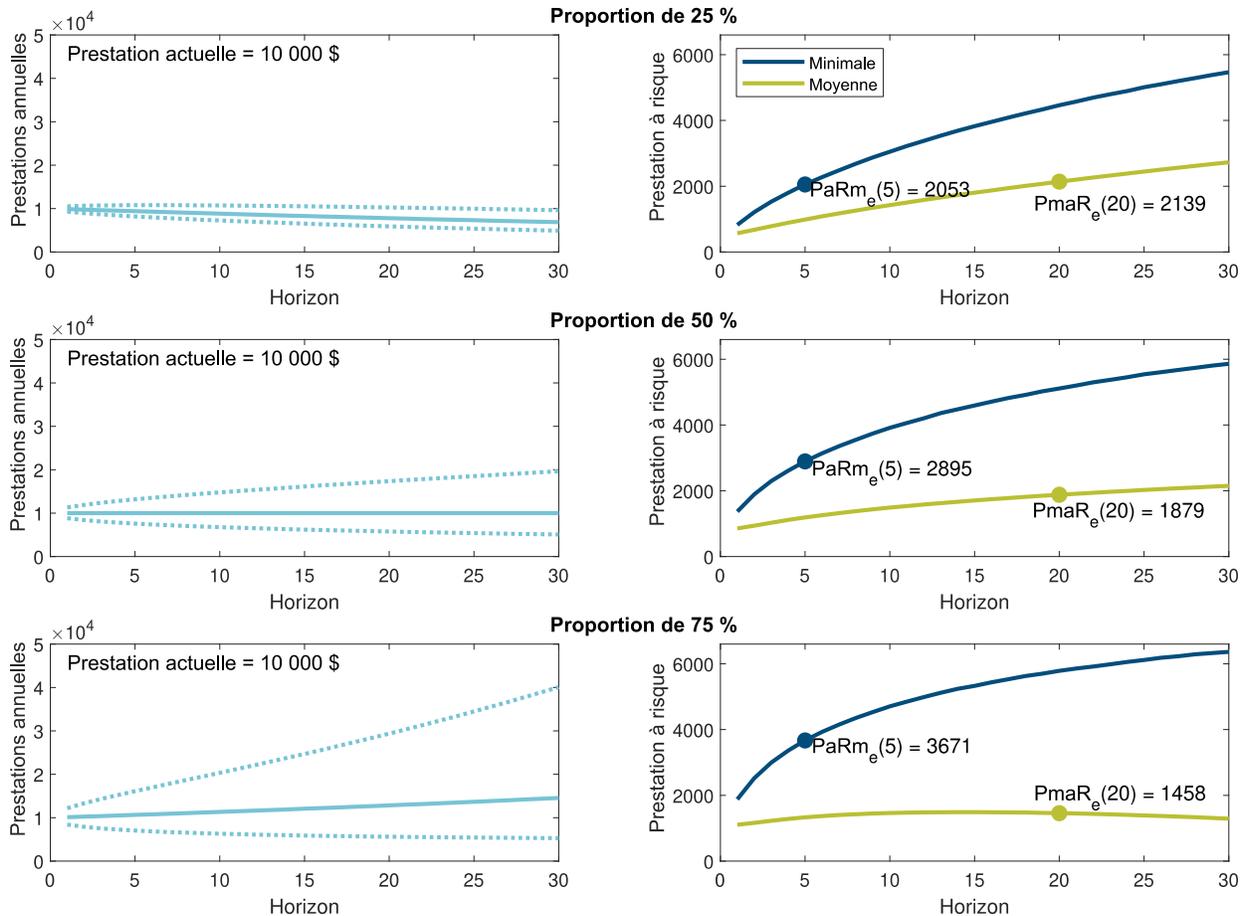
La prestation moyenne à risque avec comparateur exogène de 10 000 \$ se comporte également de façon différente de celle présentée à la figure 6; au lieu de diminuer en fonction du taux de référence, la nouvelle mesure de la PaR introduite à l'annexe B.1.2 augmente pour les taux de référence plus élevés. Cela n'est pas une surprise : un taux de référence plus élevé sous-entend une diminution des prestations, ce qui réduit la prestation moyenne et creuse davantage l'écart entre le comparateur exogène  $K$  et la statistique des prestations – la prestation moyenne dans ce cas-ci. Dans le cas d'un taux de référence inférieur, c'est le contraire : une tendance de croissance des prestations donne plus de prestations à l'avenir, une moyenne plus élevée et une prestation plus faible à risque.

## B.2.2 RÉPARTITION DE L'ACTIF

Passons maintenant à la répartition de l'actif et à son incidence sur la prestation à risque dans le cas où le comparateur est fixé à un montant exogène de  $K$ . Encore une fois, comme à la section 4.2.2, nous modifions la proportion  $\omega$  investie dans l'actif risqué (qui est supposée être un indice boursier dans ce cas-ci) tout en maintenant constantes tous les autres intrants (y compris le taux de référence).

Figure 14

### ENTONNOIR DE DOUTE DE LA PRESTATION ANNUELLE ET PRESTATION À RISQUE AVEC COMPARATEUR EXOGENE DE 10 000 \$ ET POUR DIFFÉRENTES STRATÉGIES DE RÉPARTITION DE L'ACTIF



Les graphiques de gauche dans cette figure font état d'entonnoirs de doute quant aux prestations annuelles. Nous affichons la médiane (ligne continue) ainsi que les 5<sup>e</sup> et 95<sup>e</sup> quantiles (lignes pointillées). Nous le faisons pour trois stratégies différentes de répartition de l'actif (c.-à-d. la proportion de l'actif investi dans l'actif risqué) : 25 % (graphique supérieur), 50 % (graphique du milieu) et 75 % (graphique inférieur). Les graphiques de droite de cette figure montrent la PaRm au niveau de 97,5 % (lignes bleues) et la PmaR au niveau de 90 % (lignes vertes), toutes deux utilisant 10 000 \$ comme comparateur exogène. Nous supposons un taux de référence constant de 4,5 % dans toute cette figure.

Les graphiques de gauche de la figure 14 font état d'entonnoirs de doute pour les prestations annuelles pour trois proportions différentes : 25 % (graphique supérieur), 50 % (graphique du milieu) et 75 % (graphique inférieur). Encore une fois, ce sont les mêmes entonnoirs de doute que ceux rapportés à la figure 7.

Les graphiques de droite de la figure 14 montrent des PaRm et PmaR avec comparateur exogène de 10 000 \$ sur différents horizons et pour les trois stratégies de répartition de l'actif susmentionnées. Comme prévu, les PaRm de la

figure 7 sont identiques à celles fournies à la figure 14 (voir les lignes bleues). En effet, la prestation actuelle s'élevait à 10 000 \$ pour les trois proportions de la figure 7, soit la même que celle sélectionnée  $K$  dans cet exemple.

Les prestations moyennes à risque avec comparateur exogène sont toutefois différentes des mesures de la PmaR présentées à la figure 7; leur comportement est inversé. Pour la PmaR définie à la section 2.4, le risque de déficit augmente lorsque la proportion investie dans l'actif risqué augmente elle aussi. Dans le cas des PmaR avec comparateur exogène de 10 000 \$, le risque de déficit diminue à mesure que la proportion investie dans l'actif risqué augmente. En effet, comme la prestation moyenne tend à augmenter lorsque la proportion investie dans l'actif risqué est plus élevée, la différence entre le comparateur de 10 000 \$ et la prestation moyenne devrait être réduite.

## Annexe C : Méthode bootstrap par blocs

La présente annexe explique la méthode bootstrap par blocs utilisée dans le présent rapport. Plus précisément, nous suivons l'approche mise de l'avant dans Portfolio Solution Group (2021). Nous utilisons le rendement excédentaire obtenu (assimilé au rendement total mensuel de l'actif moins le taux mensuel court, tous deux pris simultanément), auquel nous ajoutons le taux (mensuel) sans risque présumé dans la modélisation par souci de cohérence. Ce dernier taux sans risque est présumé 2 % sur une base annuelle dans l'ensemble du présent rapport (voir la section 4).

Contrairement à la pratique courante qui utilise les rendements mensuels individuels, nous utilisons des blocs de plusieurs mois. La longueur des blocs est choisie aléatoirement à partir d'une loi exponentielle avec moyenne de 24 mois dans cette application. Pour chaque parcours, nous :

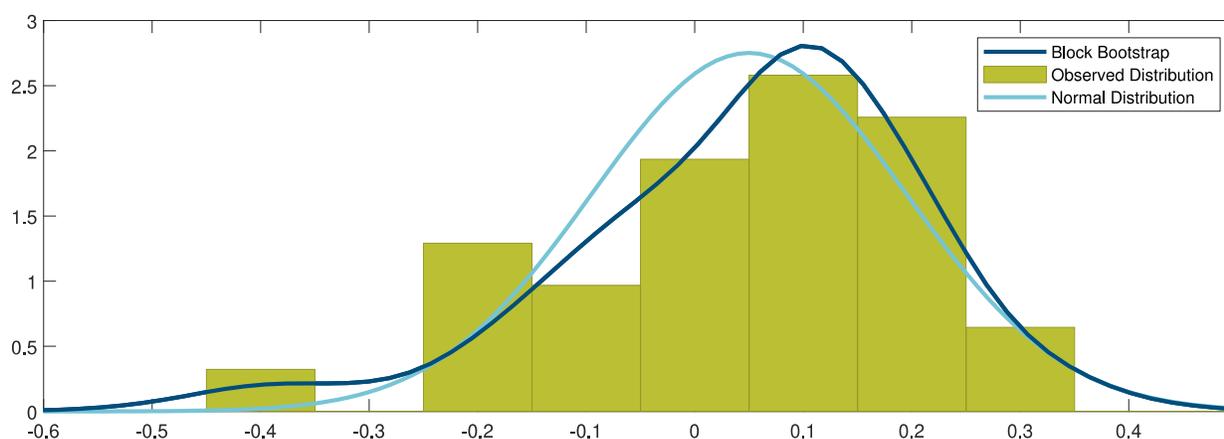
1. Sélectionnons aléatoirement un mois débutant entre janvier 1990 et juillet 2021 en utilisant une loi uniforme.
2. Générons une longueur de bloc en utilisant une loi exponentielle.
3. Copions le bloc approprié de rendements excédentaires.
4. Répétons l'exercice jusqu'à ce que le parcours obtenu soit de la longueur voulue.

Cette approche non paramétrique sans modèle préserve une partie du comportement réel, comme les ailes lourdes de la distribution, l'asymétrie, l'autocorrélation des rendements et des rendements quadratiques, et les corrélations temporelles.

La figure 15 présente un exemple de la distribution bootstrap par blocs obtenue en utilisant les rendements excédentaires composés de S&P/TSX (en bleu). À des fins de comparaison, la distribution observée obtenue à partir des rendements excédentaires composites de S&P/TSX (en vert) et d'une densité normale assortie au moment (en bleu pâle) est également illustrée à la figure 15. La distribution observée est conforme à celle obtenue avec la méthode bootstrap par blocs. La normale appariée au moment est loin de celle obtenue avec le bootstrap par blocs, surtout dans l'extrémité de gauche.

**Figure 15**

### RENDEMENT ANNUALISÉ DES ACTIFS EXCÉDENTAIRES À RISQUE SELON LA MÉTHODE BOOTSTRAP PAR BLOCS



Cette figure présente la distribution observée des rendements excédentaires composites de S&P/TSX (composés en continu) (histogramme vert) et des rendements obtenus à l'aide de la méthode du bootstrap par blocs (ligne bleue) et d'une loi normale appariée au moment avec une moyenne de 5 % et un écart-type de 15 % comme à la section 4.1 (ligne bleu pâle).

## Bibliographie

- Ahlgren, K. C., D'Arcy, S. P. et R.W. Gorrivett (2005). Modeling financial scenarios: A framework for the actuarial profession. Dans *Proceedings of the Casualty Actuarial Society*, vol 92, n° 177, pp. 177-238.
- ACARR. (2017). *Decumulation, the Next Critical Frontier: Improvements for Defined Contribution and Capital Accumulation Plans*. Association canadienne des administrateurs de régimes de retraite.
- Artzner, P., Delbaen, F., Eber, J. M. et D. Heath. (1999). Coherent measures of risk. Dans *Mathematical Finance*, vol. 9, n° 3, pp. 203-228.
- Actuaire du gouvernement australien. (2014). *Towards More Efficient Retirement Income Products*. Actuaire du gouvernement australien.
- Basak, S. et A. Shapiro. (2001). Value-at-risk-based risk management: Optimal policies and asset prices. Dans *Review of Financial Studies*, vol. 14, n° 2, pp. 371-405.
- Bégin, J.F. (2021). On complex economic scenario generators: Is less more? Dans *ASTIN Bulletin*, vol. 51, n° 3, pp. 779-812.
- Bernhardt, T. et C. Donnelly. (2019). Modern tontine with bequest: Innovation in pooled annuity products. Dans *Insurance: Mathematics and Economics*, n° 86, pp. 168-188.
- Bernhardt, T., et C. Donnelly. (2021). Quantifying the trade-off between income stability and the number of members in a pooled annuity fund. Dans *ASTIN Bulletin*, vol. 51, n° 1, pp. 101-130.
- Blanchett, D. (2014). Exploring the retirement consumption puzzle. Dans *Journal of Financial Planning*, vol. 27, n° 5, pp. 34-42.
- Boyle, P., Hardy, M., Mackay, A. et D. Saunders. (2015). *Variable Payout Annuities*. Society of Actuaries.
- Cairns, A. J., Blake, D. et K. Dowd. (2006). A two-factor model for stochastic mortality with parameter uncertainty: Theory and calibration. Dans *Journal of Risk and Insurance*, vol. 73, n° 4, pp. 687-718.
- Chen, A., et M. Rach. (2019). Options on tontines: An innovative way of combining tontines and annuities. Dans *Insurance: Mathematics and Economics*, n° 89, pp. 182-192.
- Chen, A., Hieber, P. et J.K. Klein. (2019). Tonuity: A novel individual-oriented retirement plan. Dans *ASTIN Bulletin*, vol. 49, n° 1, pp. 5-30.
- Chen, A., Rach, M. et T. Sehner. (2020). On the optimal combination of annuities and tontines. Dans *ASTIN Bulletin*, vol. 50, n° 1, pp. 95-129.
- Chen, A., Qian, L., et Z. Yang. (2021). Tontines with mixed cohorts. Dans *Scandinavian Actuarial Journal*, 2021, n° 5, pp. 437- 455.
- Chen, A., T. Nguyen et T. Sehner (2022). Unit-linked tontine: Utility-based design, pricing and performance. Dans *Risks*, vol. 10, n° 4, p. 78.
- CREF. (2022a). *Prospectus*. College Retirement Equities Fund. Accessible en ligne à <http://connect.rightprospectus.com/TIAA/TADF/194408803/S?site=VA&fundclass=RPVA>. Consulté le 27 juin 2022.
- CREF. (2022b). *Statement of additional information*. College Retirement Equities Fund. Accessible en ligne à <http://connect.rightprospectus.com/TIAA/TADF/194408803/S?site=VA&fundclass=RPVA>. Consulté le 27 juin 2022.
- Cui, J., De Jong, F. et E. Ponds. (2011). Intergenerational risk sharing within funded pension schemes. Dans *Journal of Pension Economics & Finance*, vol. 10, n° 1, pp. 1-29.
- Daykin, C. (2004). *Annuities and alternative ways of providing retirement income*. Présenté au séminaire sur les pensions, les avantages sociaux et la sécurité sociale, qui fait partie du colloque de l'AIAC, du PBSS et de l'IAAust.
- Donnelly, C., Guillén, M. et J. P. Nielsen. (2013). Exchanging uncertain mortality for a cost. Dans *Insurance: Mathematics and Economics*, vol. 52, n° 1, pp. 65-76.
- Donnelly, C., Guillén, M. et J. P. Nielsen. (2014). Bringing cost transparency to the life annuity market. Dans *Insurance: Mathematics and Economics*, vol. 56, pp. 14-27.
- Donnelly, C. (2015). Actuarial fairness and solidarity in pooled annuity funds. Dans *ASTIN Bulletin*, vol. 45, n° 1, pp. 49-74.

- Dufresne, D (2008). Sums of lognormals. Dans *Proceedings of the 43rd Actuarial Research Conference at the University of Regina*.
- Dhaene, J., Goovaerts, M. et K. Van Weer. (2008). Some comments on QIS3. Dans *Zavarovalniski Horizonti*, vol. 3, pp. 73-87.
- Fenton, L. (1960). The sum of lognormal probability distributions in scatter transmission systems. Dans *IRE Transactions on Communications Systems*, vol. 8, n° 1, pp. 57-67.
- Forman, J. B. et M. J. Sabin. (2015). Tontine pensions. Dans *University of Pennsylvania Law Review*, vol. 163, n° 3, p. 755.
- Fullmer, R. K. (2019). *Tontines: A Practitioner's Guide to Mortality-Pooled Investments*. CFA Institute Research Foundation.
- Fullmer, R. K., et M. J. Sabin. (2019). Individual tontine accounts. Dans *Journal of Accounting and Finance*, vol. 19, n° 8, pp. 2158-3625.
- Fullmer, R. K., et J. B. Forman. (2022). State-sponsored pensions for private-sector workers. Dans Mitchell, O. (Ed.), *New Models for Managing Longevity Risk: Public-Private Partnerships* (pp. 171-206). Oxford University Press: Oxford, UK.
- Greenwald Research. (2022). *2021 Retirement Risk Survey, Report of Findings*. Society of Actuaries
- Hanewald, K., Piggott, J. et M. Sherris. (2013). Individual post-retirement longevity risk management under systematic mortality risk. Dans *Insurance: Mathematics and Economics*, vol. 52, n° 1, pp. 87-97.
- Horneff, W. J., Maurer, R. H., Mitchell, O. S. et M. Z. Stamos. (2010). Variable payout annuities and dynamic portfolio choice in retirement. Dans *Journal of Pension Economics & Finance*, vol. 9, n° 2, pp. 163-183.
- Holton, G.A. (2002). History of value-at-risk. *Document de travail*.
- Iwry, J. M., Haldeman, C., Gale, W. et D. John. (2020). *Retirement Tontines: Using a Classical Finance Mechanism as an Alternative Source of Retirement Income*. The Brookings Institution.
- Jorion, P. (1997). In defense of VaR. Dans *Derivatives Strategy*, vol. 2, n° 4, pp. 20-23.
- Kocken, T. P. (2012). Pension liability measurement and intergenerational fairness: Two case studies. Dans *Rotman International Journal of Pension Management*, vol. 5, n° 1, pp. 16-24.
- Lee, R. D. et L.R. Carter (1992). Modeling and forecasting US mortality. Dans *Journal of the American Statistical Association*, vol. 87, n° 419, pp. 659-671.
- Lusardi, A. et O.S. Mitchell. (2011). Financial literacy around the world: An overview. Dans *Journal of Pension Economics & Finance*, vol. 10, n° 4, pp. 497-508.
- MacDonald, B. J., Jones, B., Morrison, R. J., Brown, R. L. et M. Hardy. (2013). Research and reality: A literature review on drawing down retirement financial savings. Dans *North American Actuarial Journal*, vol. 17, n° 3, pp. 181-215.
- Milevsky, M. A. (2015). *King William's Tontine: Why the Retirement Annuity of the Future Should Resemble its Past*. Cambridge University Press.
- Milevsky, M. A. et T.S. Salisbury. (2015). Optimal retirement income tontines. Dans *Insurance: Mathematics and Economics*, vol. 64, pp. 91-105.
- Milevsky, M. A. et T.S. Salisbury. (2016). Equitable retirement income tontines: Mixing cohorts without discriminating. Dans *ASTIN Bulletin*, vol. 46, n° 3, pp. 571-604.
- OCDE. (2022). *Recommandation du Conseil pour la bonne conception des plans de retraite à cotisations définies*. Organisation de coopération et de développement économiques. Accessible en ligne à <https://legalinstruments.oecd.org/en/instruments/OECD-LEGAL-0467>. Consulté le 30 juin 2022.
- Olivieri, A. et E. Pitacco. (2020). Linking annuity benefits to the longevity experience: Alternative solutions. Dans *Annals of Actuarial Science*, vol. 14, n° 2, pp. 316-337.
- Piggott, J., Valdez, E. A. B. et Detzel. (2005). The simple analytics of a pooled annuity fund. Dans *Journal of Risk and Insurance*, vol. 72, n° 3, pp. 497-520.
- Pollak, R. A. (1970). Habit formation and dynamic demand functions. Dans *Journal of Political Economy*, vol. 78, n° 4, pp. 745-763.
- Portfolio Solution Group (2021). *What's the Worst That Should Happen?* Applied Quantitative Research.

- Qiao, C. et M. Sherris. (2013). Managing systematic mortality risk with group self-pooling and annuitization schemes. Dans *Journal of Risk and Insurance*, vol. 80, n° 4, pp. 949-974.
- Sabin, M. J. (2010). Fair tontine annuity. *Document de travail*.
- Sabin, M. J. et J. B. Forman. (2016). The analytics of a single-period tontine. *Document de travail*.
- SOA. (2002). *Market Opportunities Research*. Society of Actuaries
- Shemtob, M. (2021). CRITs: An alternative retirement income approach. Dans *Retirement Section News of the Society of Actuaries*, Septembre 2021.
- Stemtob, M. (2022). Time to take the plunge. Dans *Contingencies*. Septembre/Octobre 2022, pp. 32-36.
- Stamos, M. Z. (2008). Optimal consumption and portfolio choice for pooled annuity funds. Dans *Insurance: Mathematics and Economics*, vol. 43, n° 1, pp. 56-68.
- Valdez, E. A., Piggott, J. et L. Wang. (2006). Demand and adverse selection in a pooled annuity fund. Dans *Insurance: Mathematics and Economics*, vol. 39, n° 2, pp. 251-266.
- Wilkie, A. D. (1986). A stochastic investment model for actuarial use. Dans *Transactions of the Faculty of Actuaries*, vol. 39, pp. 341-403.
- Wilkie, A. D. (1995). More on a stochastic asset model for actuarial use. Dans *British Actuarial Journal*, vol. 1, n° 5, pp. 777-964.

## À propos de l'Institut de recherche de la Society of Actuaries

En tant qu'organe de recherche de la Society of Actuaries (SOA), l'Institut de recherche de la SOA fournit des recherches objectives fondées sur des données qui regroupent des pratiques éprouvées et des approches axées sur l'avenir pour relever les défis sociétaux et répondre à vos besoins opérationnels. L'Institut fournit des connaissances fiables, une vaste expérience et de nouvelles technologies pour aider à cerner, à prévoir et à gérer efficacement les risques.

Représentant les milliers d'actuaire qui aident à mener des recherches essentielles, l'Institut de recherche de la SOA fournit des précisions et des solutions sur les risques et les défis sociétaux. L'Institut met en relation les actuaire, les universitaires, les employeurs, le secteur des assurances, les organismes de réglementation, les partenaires de recherche, les fondations et les établissements de recherche, les commanditaires et les organisations non gouvernementales, en établissant un réseau efficace qui offre un soutien, des connaissances et une expertise en matière de gestion des risques au profit de l'industrie et du public.

Géré par des actuaire chevronnés et des experts en recherche provenant d'une vaste gamme de secteurs, l'Institut de recherche de la SOA crée, finance, élabore et distribue des travaux de recherche pour permettre aux actuaire de devenir des chefs de file en évaluation et en gestion des risques. Ces efforts comprennent des études, des collections d'essais, des webémissions, des documents de recherche, des rapports d'enquête et des recherches originales sur des sujets ayant une incidence sur la société.

En mettant à profit ses recherches évaluées par les pairs, ses technologies de pointe, ses nouveaux outils de données et ses pratiques novatrices, l'Institut cherche à comprendre les causes sous-jacentes du risque et les résultats possibles. Il élabore des recherches objectives couvrant une variété de sujets grâce à ses [programmes de recherche stratégique](#) : vieillissement et retraite; innovation et technologie actuarielle; mortalité et longévité; diversité, équité et inclusion; tendances des coûts des soins de santé; risques de catastrophe et risque climatique. L'Institut dispose d'un grand nombre de [recherches thématiques](#), y compris une collection élargie de recherches internationales et propres au marché, d'études d'expérience, de modèles et de recherches opportunes.

Institut de recherche de la Society of Actuaries  
475 N. Martingale Road, Suite 600  
Schaumburg, Illinois 60173  
[www.soa.org](http://www.soa.org)

## À propos de l'Institut canadien des actuaires

L'Institut canadien des actuaires (ICA) est l'organisme de qualification et de gouvernance de la profession actuarielle au Canada. Nous élaborons et maintenons des normes rigoureuses, nous partageons notre expertise en gestion des risques et nous faisons progresser la science actuarielle pour améliorer la vie des gens au Canada et à l'échelle du monde. Nos plus de 6 000 membres utilisent leurs connaissances en mathématiques, en statistiques, en analyse de données et en affaires dans le but de prodiguer des services et des conseils de la plus haute qualité afin d'aider les personnes et les organisations canadiennes à faire face à leur avenir en toute confiance.

### VISION

La sécurité financière de toute la population canadienne.

### MISSION

En tant qu'organisme de qualification et de gouvernance de la profession actuarielle canadienne, nous élaborons et maintenons des normes rigoureuses, partageons notre expertise en gestion du risque et faisons progresser la science actuarielle pour le bien-être financier de la société.

### VALEURS

Nous nous préoccupons des principes. Le professionnalisme nous définit. Nous sommes dignes de confiance et responsables, et nous respectons des principes éthiques rigoureux.

Nous nous préoccupons des gens. Nous favorisons un environnement diversifié et inclusif. Nous faisons passer l'intérêt public avant le nôtre.

Nous nous préoccupons de l'avenir. La prévoyance est notre force. Nous prévoyons le risque pour que la profession évolue avec notre environnement changeant.

Institut canadien des actuaires  
360, rue Albert, bureau 1740  
Ottawa (Ontario) K1R 7X7  
[www.cia-ica.ca](http://www.cia-ica.ca)