

*Document de recherche*

**Couverture du risque de longévité sur le  
marché canadien**

**Alain Bélanger et Sullivan Giannini (USherbrooke) et  
Christian Robert, FICA**

**Juillet 2021**

Document rp221078

*Ce document est disponible en français*

*© 2021 Canadian Institute of Actuaries*

## Résumé

Nous présentons certains des résultats élaborés dans la thèse de Giannini (2020), qui renferme une étude approfondie sur l'efficacité de plusieurs instruments financiers dérivés liés à la mortalité/longévité dans la couverture du risque de longévité des portefeuilles de rentes. Nous n'aborderons pas les couvertures de flux de trésorerie comme les swaps et les caps de survie. Nous nous concentrerons plutôt sur les couvertures de valeur fournies par les (q-) forwards et puts de mortalité et par les Kappa (K-) forwards et puts. Nous appliquerons le cadre de couverture en q- durées clés du document fondamental de Li et Luo (2012) et le cadre de couverture en K-durées clés décrit dans les articles de Chan et coll. (2014), Tan et coll. (2014) et Li et coll. (2019). Nous nous limiterons à une couverture statique, mais nos portefeuilles de rentes seront composés de multiples cohortes de la population canadienne. Les K-instruments susmentionnés sont fondés sur les deux indices variant dans le temps du modèle proposé par Cairns et coll. (2006) et connu familièrement sous l'appellation M5.

## Préambule

### Le risque de longévité et pourquoi s'en soucier

L'accent placé sur le risque de longévité est relativement nouveau en dehors de l'industrie de l'assurance; jusqu'à récemment, il a été largement ignoré par les promoteurs de régimes de retraite, les gouvernements et les particuliers qui insistaient principalement sur la gestion des risques de placement. La faiblesse des taux d'intérêt, le vieillissement de la population et les perspectives de croissance anémique de la plupart des pays développés, ainsi que le faible rendement attendu des investissements qu'ils génèrent, ont contribué à une plus grande prise de conscience du risque de longévité et de la nécessité d'un plus large éventail de solutions par l'entremise des marchés financiers.

Le risque de longévité représente le danger d'épuiser notre épargne-retraite et le défi qui s'ensuit, c'est-à-dire maintenir le niveau de vie auquel nous sommes habitués ou d'assumer une hausse constante des coûts liés aux soins de santé et de logement à la retraite. Le risque de longévité touche également toutes les organisations, privées ou publiques, qui garantissent un revenu viager, des prestations de décès, le remboursement des coûts des soins de santé de longue durée ou le financement des services sociaux. Ainsi, les particuliers, les régimes de retraite, les assureurs et les contribuables peuvent être affectés financièrement par l'amélioration des taux de survie.

Le risque de longévité diffère du risque de placement, car il n'est pas diversifiable. Les promoteurs de régimes de retraite privés qui souhaitent gérer leur risque de longévité ont une faible marge de manœuvre et à peine quelques options. Ils peuvent le transférer à des assureurs au moyen de contrats de rente ou conclure des accords complexes sur mesure de swap de longévité. Les assureurs manquent également de souplesse pour gérer efficacement les risques de longévité et de mortalité. De nouvelles solutions efficaces de couverture des risques augmenteraient leur capacité de gérer le risque de longévité et de mortalité.

Les changements apportés au cadre de réglementation devraient également appuyer l'utilisation de produits de couverture de la longévité et de la mortalité. La réglementation qui s'applique à l'industrie des assurances est à l'étude et, à mesure que les organismes de réglementation privilégient une plus grande harmonisation à l'échelle mondiale, nous

pouvons nous attendre à ce qu'ils favorisent l'utilisation de modèles internes pour gérer plus activement les risques de longévité et de mortalité. L'incitation à le faire pourrait inclure la reconnaissance de tels efforts au moyen d'un allègement du capital, une meilleure appréciation des risques et une meilleure tarification des produits d'assurance-vie.

À mesure que les promoteurs de régimes et les assureurs se pencheront sur le risque de longévité, des solutions intégrant le marché financier élargi seront essentielles et profiteront à tous les intervenants en instaurant un mécanisme de tarification plus efficace pour les risques de longévité et de mortalité.

L'attrait des produits liés à la longévité pour les investisseurs qui ne sont habituellement pas exposés au risque de mortalité ou de longévité devrait découler de la prime de risque de longévité payée et de la faible corrélation de ces risques avec tout autre risque de marché. Le présent document s'inscrit dans une approche visant à élaborer des solutions de marché efficaces et pratiques pour couvrir les risques de longévité et de mortalité. La mise en valeur de ce marché repose précisément sur deux exigences concurrentes, à savoir élaborer un petit ensemble d'indices transparents qui sont suffisamment variés pour que la couverture ne comporte pas trop de risque de base de population, c'est-à-dire le risque de couvrir la survie d'une population par une autre.

Les indices et les instruments de couverture présentés dans le présent document permettent de saisir efficacement la variabilité des taux de mortalité, de sorte qu'un seul indice de mortalité serait nécessaire pour embrasser la couverture des rentes ou des produits d'assurance-vie pour plusieurs âges à la retraite. En outre, la possibilité d'élaborer des instruments de couverture de longévité qui sont efficaces dans des contextes interdémographiques devrait renforcer leur attrait pour une grande participation au marché.

## 1. Les modèles CBD

### 1.1 CBD-M5

Cairns et coll. (2006) a proposé le modèle suivant pour la logit des taux de mortalité :

$$\ln \left( \frac{q_{x,t}}{1 - q_{x,t}} \right) = \kappa_t^{(1)} + \kappa_t^{(2)} (x - \bar{x})$$

où

$q_{x,t}$  est la probabilité qu'une personne d'âge  $x$  à l'année  $t$  décède entre  $t$  et  $t + 1$ .

$\bar{x}$  est la moyenne de la tranche d'âge considérée (p. ex.,  $\bar{x} = 82$  pour la tranche de 65 à 99 ans);

$\kappa_t^{(i)}$  pour  $i = 1, 2$ , les paramètres variables dans le temps du modèle.

Nous avons obtenu les paramètres du modèle à l'aide de la méthode des moindres carrés ordinaires (MCO) appliquée aux taux historiques de mortalité des Canadiennes de 65 à 99 ans pour la période comprise entre 1970 et 2016. Les données historiques proviennent de la Human Mortality Database (HMD). Nous avons également obtenu les paramètres

selon la méthode du maximum de vraisemblance (Cairns et coll. 2009) et les résultats sont pratiquement identiques.

Lorsque nous avons les paramètres  $K_t^{(1)}$  et  $K_t^{(2)}$  variables dans le temps, nous sélectionnons une dynamique VARIMA qui les modélise de façon conjointe. Suivant Li et coll. (2019), nous utilisons la marche aléatoire à deux dimensions avec dérive, qui est un modèle parcimonieux offrant un bon ajustement des données. Plus précisément, nous avons

$$\vec{\kappa}_t = \vec{\mu} + \vec{\kappa}_{t-1} + \mathbf{A} \vec{z}_t$$

où

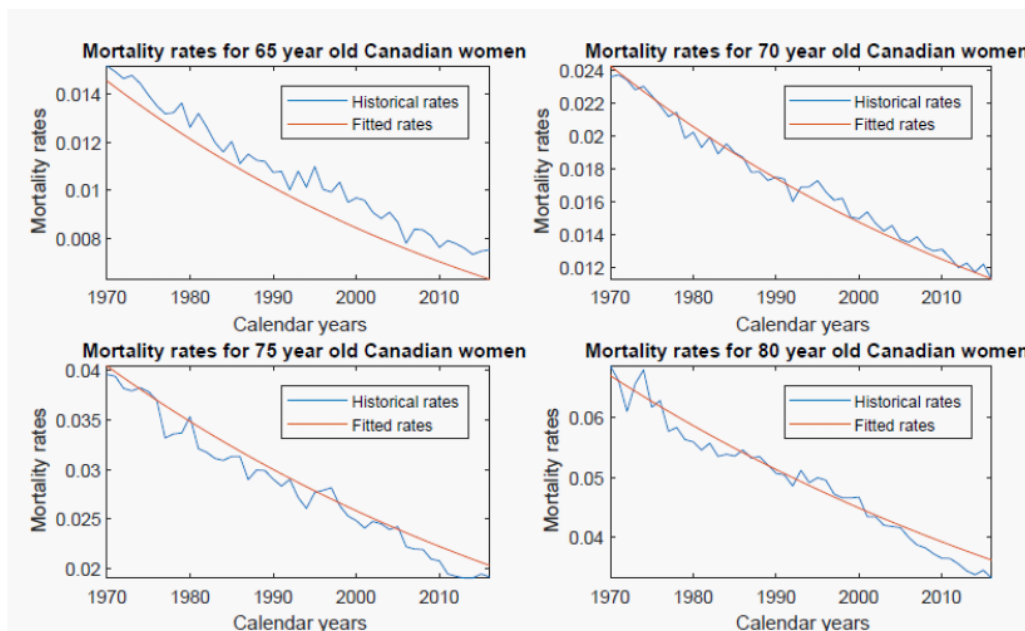
$\vec{\kappa}_t = (\kappa_t^{(1)}, \kappa_t^{(2)})'$ , les paramètres variables dans le temps;

$\vec{\mu} = (\mu_1, \mu_2)'$ , les dérivées constantes;

$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix}$  la décomposition de Cholesky de la matrice de covariance des résidus;

$\vec{z}_t = (z_t^1, z_t^2)'$ , les termes d'erreur normaux standard indépendants.

Voici quelques représentations graphiques de la concordance et des facteurs pour les Canadiennes de divers âges. Il est bien connu que le modèle M5 ne fournit pas la meilleure concordance des données. Nous le comparerons plus tard avec les concordances du modèle M7.



\*Ce graphique est disponible en anglais seulement.

## 1.2 Propriétés des indices

Comme il est mentionné dans Chan et coll. (2014), les indices de mortalité des modèles CBD possèdent les trois propriétés souhaitables suivantes :

1. Leur calcul est transparent et facile à interpréter. Le premier indice,  $K_t^{(1)}$ , représente le niveau général des courbes de mortalité à tous les âges. Une réduction de  $K_t^{(1)}$  sous-entend une réduction globale de la mortalité. Le deuxième indice,  $K_t^{(2)}$ , représente le gradient de la courbe de mortalité. Une réduction de  $K_t^{(2)}$  sous-entend que la mortalité aux âges plus avancés ( $x > \bar{x}$ ) s'améliore plus rapidement qu'aux âges plus jeunes ( $x < \bar{x}$ ). La réduction des deux indices affecte doublement le passif d'un régime de retraite fermé.<sup>1</sup>
2. Les indices sont de faible dimension, mais ils peuvent représenter avec exactitude les profils d'amélioration de la mortalité pour tous les âges.<sup>2</sup> La possibilité d'utiliser seulement deux indices pour chaque population et chaque sexe devrait améliorer la liquidité des instruments fondés sur ces indices.<sup>3</sup>
3. Le modèle possède la propriété d'invariance pour les nouvelles données. En d'autres termes, à mesure que de nouvelles données sont prises en compte, les valeurs antérieures des indices ne changent pas. Il est donc facile de tenir les indices à jour.

## 1.3 Autre modèle pour un bon contrôle : le modèle CBD-M7

Comme nous l'avons déjà mentionné, nous avons mis à l'essai les stratégies de couverture au moyen de simulations de Monte Carlo des trajectoires de mortalité générées par M5, le modèle de Li-Lee et M7 (voir Giannini 2020). Ces essais à l'aide de différents types de modèles nous donnent des évaluations robustes de l'efficacité de la couverture et, en particulier, évitent un certain type « d'endogamie de modèle » inhérent à la mise à l'essai des couvertures M5 uniquement avec des trajectoires générées par M5. Comme nous le verrons, M7 offre une bien meilleure concordance des données et tient compte en particulier des effets de cohorte. Nous avons également testé la couverture au moyen du modèle de Li-Lee (appliqué aux populations canadiennes de sexe féminin et masculin). Il n'offre pas une aussi bonne concordance que M7, mais il s'agit d'un modèle standard de la littérature actuarielle.

M7 est un autre modèle proposé par Cairns et coll. (2009). L'équation de base est la suivante :

---

<sup>1</sup> Dans le présent document, nous examinerons principalement le point de vue d'un régime de retraite qui couvre son risque de longévité, mais des commentaires semblables peuvent être formulés pour la couverture du risque de mortalité dans un portefeuille d'assurance-vie. Par exemple, un effet doublement négatif s'applique lorsqu'il y a réduction de  $K_t^{(1)}$  et augmentation de  $K_t^{(2)}$ . Cela est important, car nous nous attendons à susciter beaucoup d'intérêt de la part des participants du marché qui souhaitent également effectuer ces activités de couverture.

<sup>2</sup> Nous avons mis à l'essai l'efficacité de la couverture des instruments à partir de ces indices en utilisant le modèle M5, le modèle de Li-Lee et le modèle M7 pour générer des trajectoires de mortalité. Les trois modèles donnent des résultats très proches (voir Giannini 2020). Sachant que nos résultats sont robustes, nous ne présenterons que les résultats de M7 dans le présent article.

<sup>3</sup> Nous avons comparé séparément l'efficacité de couverture des instruments fondés sur  $K_t^{(1)}$  et des instruments fondés sur  $K_t^{(2)}$  (voir Giannini 2020). Lorsqu'un instrument fondé sur  $K_t^{(1)}$  est utilisé pour la couverture, la contribution supplémentaire de l'instrument  $K_t^{(2)}$  au chapitre de la réduction des risques est très marginale. Nous nous concentrerons donc sur les instruments  $K_t^{(1)}$  seulement.

$$\ln \left( \frac{q_{x,t}}{1 - q_{x,t}} \right) = \kappa_t^{(1)} + \kappa_t^{(2)}(x - \bar{x}) + \kappa_t^{(3)} \left( (x - \bar{x})^2 - \sigma_x^2 \right) + \gamma_{t-x}$$

où

$\sigma_x^2$  est la moyenne de  $(x - \bar{x})^2$ ;

$\kappa_t^{(3)}$  est le troisième paramètre variable dans le temps du modèle;

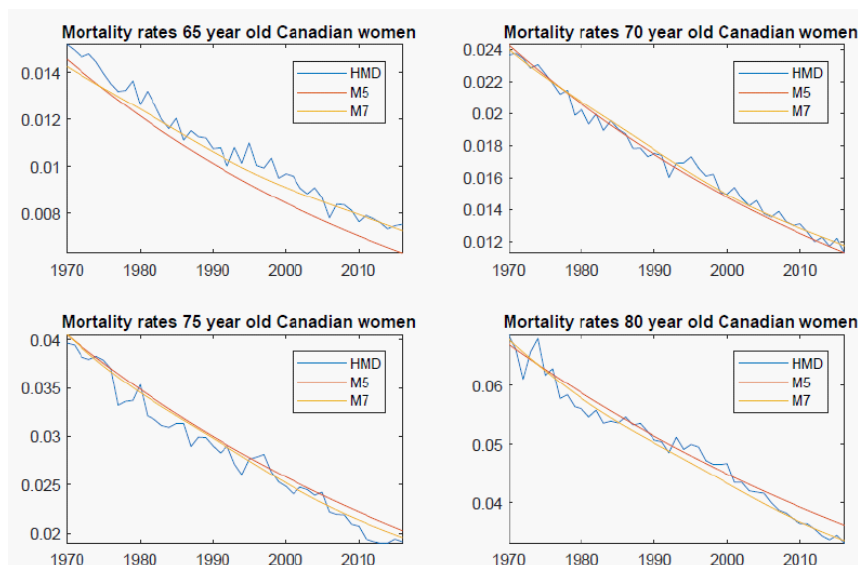
$\gamma_{t-x}$  est le terme associé à la cohorte des personnes nées au cours de l'année  $t - x$ .

Les facteurs du modèle demeurent faciles à calculer et à interpréter :  $\kappa_t^{(3)}$  tient compte de la courbure de la logit des taux de mortalité et  $\gamma_{t-x}$  saisit les effets de cohorte. Il contient M5 comme modèle imbriqué :  $\kappa_t^{(3)} = \gamma_{t-x} = 0$  pour tous les  $x$  et  $t$ , dans l'équation ci-dessus. M5 n'a pas besoin d'une contrainte d'identification, mais nous devons imposer les trois

contraintes d'identification suivantes à l'effet de cohorte de M7 :  $\sum_c \gamma_c = 0$ ;  $\sum_c c\gamma_c = 0$   
 et  $\sum_c c^2\gamma_c = 0$

. Malheureusement, l'ajout du terme d'effet de cohorte (et de ses contraintes), avec sa dépendance à  $x$ , sous-entend que le modèle ne possède plus la propriété d'invariance pour les nouvelles données. Mais la concordance avec M7 est grandement améliorée par rapport à M5, ce qui est bien documenté pour les populations de l'Angleterre et du pays de Galles (Cairns et coll., 2009). Nous montrerons que la situation est semblable pour la population canadienne. Nous utiliserons ensuite M7 pour générer des trajectoires de taux de mortalité en tenant compte de ses facteurs lorsque nous testons l'efficacité de la couverture. Liu et Li (2018) utilisent M7 pour étudier l'efficacité de la couverture des q-forwards dans les populations de l'Angleterre et du Pays de Galles.

Au moins sur le plan graphique, M7 semble offrir une meilleure concordance que M5 :



\*Ce graphique est disponible en anglais seulement.

Et cela est confirmé par les statistiques suivantes des deux concordances :

Modèle	M5	M7
Log-vraisemblance maximale	-12 047	-9 604,4
Nombre de paramètres	94	222
Nombre d'observations	1 645	1 645
CIA	24 282	19 653
CIB	24 790	20 853
EQM	0,0328	0,0394
MAPE	0,0369	0,0263

Ici, CIA et CIB désignent, comme d'habitude, le critère d'information d'Akaike et le critère d'information bayésien. Le seul test dans lequel M7 n'est pas supérieur est l'erreur quadratique moyenne (EQM). Toutefois, comme son erreur moyenne absolue en pourcentage (MAPE) est plus faible, cela signifie que la concordance de M7 est entravée par au moins une valeur aberrante. Et en effet, lorsque nous n'incluons pas l'erreur pour l'âge le plus avancé, soit 99 ans (c.-à-d. que nous limitons la fenêtre d'âge à 65–98 ans, disons), nous obtenons des EQM de 0,0274 et de 0,0234 pour M5 et M7 respectivement.

#### 1.4 Étalonage supplémentaire des paramètres du modèle pour intégrer la prime de risque

Pour établir le prix de tous les instruments de chacun des trois modèles, nous avons utilisé la procédure d'évaluation canonique décrite dans Li et Ng (2011), et nous l'avons appliquée à l'obligation de longévité EIB/Paribas (Cairns et coll. 2009). L'obligation a une durée de 25 ans et elle est liée à la survie de la population masculine de l'Angleterre et du Pays de Galles. Le prix a été fixé avec une prime de  $\delta = 0,002$  dans l'équation

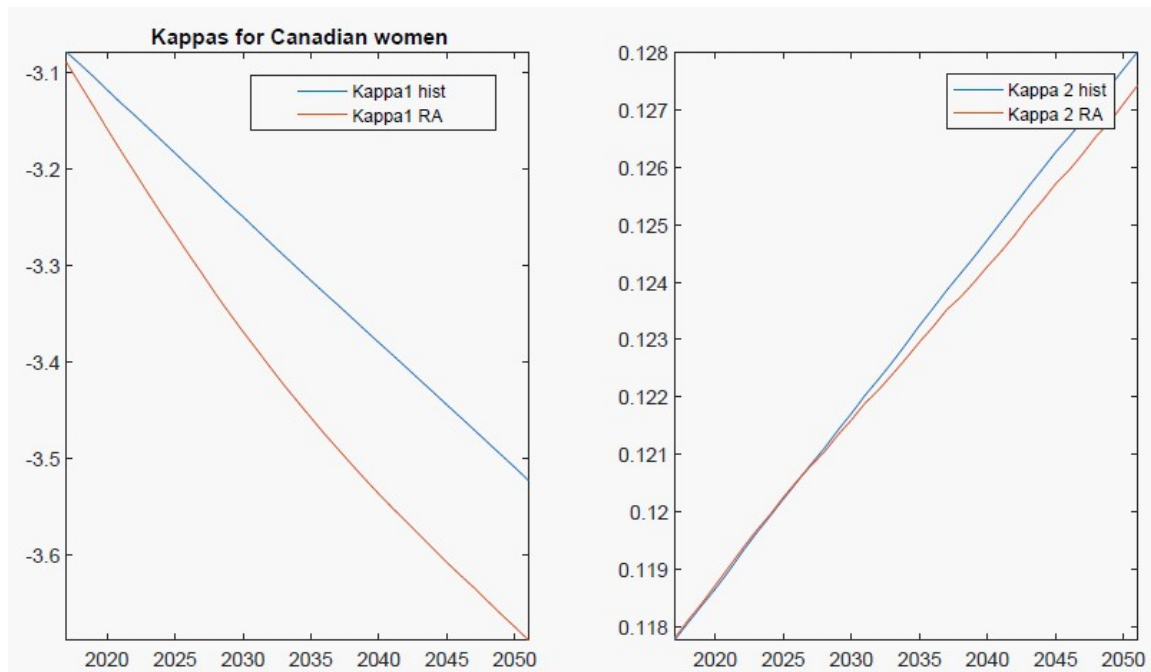
$$P = \sum_{t=1}^{25} B(0, t) \exp(\delta t) \mathbb{E}^{BE} [S_t]$$

où  $B(0, t)$  est le facteur d'actualisation pour le temps  $t$  et  $\mathbb{E}^{BE} [S_t]$  est la prévision de survie (meilleure estimation) de la population au temps  $t$  dans la mesure historique.

Avec n'importe lequel des trois modèles, nous sélectionnons une cohorte (p. ex., les canadiennes de 65 ans) et effectuons des simulations de Monte Carlo en vertu desquelles nous générons 10 000 trajectoires de taux de mortalité avec le modèle, nous établissons la valeur de l'obligation pour chaque trajectoire et nous réglons les probabilités qui nous donnent le prix  $P$  calculé avec la formule ci-dessus. Ces probabilités définissent notre mesure ajustée en fonction des risques (AR), c.-à-d.

$$P = \sum_{t=1}^{25} B(0, t) \mathbb{E}^{RA} [S_t].$$

Nous pouvons ensuite utiliser ces probabilités pour établir le prix de tout instrument lié à la mortalité/longévité de la cohorte sélectionnée. Les instruments de mortalité (q-) sont liés à une seule cohorte, mais dans le cas des instruments K, nous utilisons la cohorte pour l'âge moyen,  $\bar{x} = 82$ , de la fenêtre d'âge considérée, pour établir le prix des instruments. Voici, à titre d'exemple, les ajustements apportés aux trajectoires prévues pour les deux facteurs kappa de M5.



\*Ce graphique est disponible en anglais seulement.



## 2. Le portefeuille des rentes

Nous considérons un portefeuille synthétique composé d'un total de 4 000 rentiers dans 20 cohortes, avec 275 rentiers pour chacune des cohortes de 65 à 69 ans, 200 pour celles de 70 à 74 ans, 175 pour celles de 75 à 79 ans et 150 pour celles de 80 à 84 ans. Les rentes sont des rentes viagères immédiates qui versent 1 \$ à toutes les personnes survivantes à la fin de l'année  $t$ . Aux fins de la présente étude, nous avons mis l'accent sur les cohortes de femmes canadiennes. Si  $k = 1:4000$  désigne un rentier, supposons que  $a_k$  indique son âge au temps 0. L'actif du régime de retraite est calculé au moyen de l'AR :

$$A = \mathbb{E}^{RA} \left[ \sum_{k=1}^{4000} \sum_{t=1}^{\omega - a_k} B(0, t) S_{a_k}(t) \right]$$

où  $S_{a_k}(t)$  est le taux de survie pour l'âge  $a_k$  ;  $B(0, t)$  est le taux d'actualisation au temps  $t$ , et  $\omega$  est l'âge maximal pris en compte, que nous supposons être 100 ans. Chaque

rentier,  $k$ , génère une séquence de passifs  $L_k = \sum_{t=1}^{\lfloor \tau_k \rfloor \wedge \omega} B(0, t)$ , où  $\tau_k$  est le moment du décès du  $k^{th}$  rentier. La quantité à couvrir est l'excédent  $D = A - \sum_{k=1}^{4000} L_k$ , ce qui est pratique à

considérer par contrat :  $\bar{D} = D/4000$ . Si  $H$  désigne le résultat à l'échéance actualisée du portefeuille de couverture, nous examinerons la distribution de  $\bar{D}_F = (D + H_F)/4000$  lorsque nous couvrons avec des contrats à terme et  $\bar{D}_P = (D + H_P - \text{premium})/4000$  lorsque nous couvrons avec des options de vente.

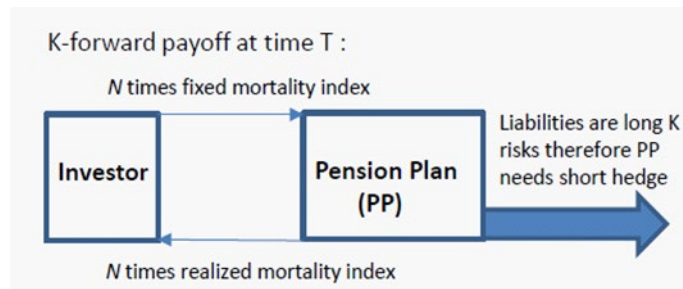
Chaque simulation de Monte Carlo que nous effectuons pour tester les couvertures implique le calcul du moment du décès,  $\tau_k$ , de chaque rentier. À l'aide de ces réalisations, nous calculons le résultat à l'échéance du passif, ainsi que les résultats à l'échéance des instruments de couverture. Nous comparons ensuite les statistiques descriptives des distributions pour évaluer l'efficacité des couvertures. Les temps de décès sont générés comme premier saut d'un processus de Cox dont les trajectoires de mortalité sont générées par réalisations à partir de M7 (de M5 ou de Li-Lee).

## 3. Les instruments de couverture

Nous présentons d'abord les instruments K-. Nous comparerons l'efficacité de leur couverture à celle des instruments de mortalité que nous décrirons plus loin.

### 3.1 Contrats K-forwards

Soit  $N$  le notionnel de l'opération :



\*Ce graphique est disponible en anglais seulement.

Soit  $t_0$  le moment où le contrat à terme est initié et soit  $T$  son échéance. Supposons  $N = 1$  \$ par souci de simplicité. Le résultat à l'échéance du point de vue du PP est  $\mathcal{F}^{(i)}(T, K) = K^{(i)} - \kappa_T^{(i)}$  où  $K^{(i)}$  est l'indice de mortalité fixe et  $\kappa_T^{(i)}$  l'indice réalisé au temps  $T$  avec  $i = 1, 2$ . Sa valeur au moment  $t : t_0 \leq t < T$  est

$$\begin{aligned} F_t^{(i)}(T, K) &= (1 + r_f)^{-(T-t)} \mathbb{E}_t^{RA} \left[ \mathcal{F}^{(i)}(T, K^{(i)}) \right] \\ &= (1 + r_f)^{-(T-t)} \left( K^{(i)} - \mathbb{E}_t^{RA} \left[ \kappa_T^{(i)} \right] \right) \end{aligned}$$

Comme à l'habitude, nous ne souhaitons pas qu'un paiement initial soit effectué,  $F_{t_0}^{(i)}(T, K) = 0$  et par conséquent  $K^{(i)} = \mathbb{E}_{t_0}^{RA} \left[ \kappa_T^{(i)} \right]$ . Comme nous l'avons mentionné précédemment, nous ne tiendrons compte que des instruments en fonction de  $\kappa_t^{(1)}$ , car ce sont eux qui comptent, et nous supposons  $K = \mathbb{E}_{t_0}^{RA} \left[ \kappa_T^{(1)} \right]$ . Afin de simplifier les notations, la lettre  $K$  sera utilisée tout au long pour indiquer le niveau du côté fixe et le niveau d'exercice des options de vente pour tous les instruments de couverture. Sa signification devrait être claire dans le contexte de chaque instrument.

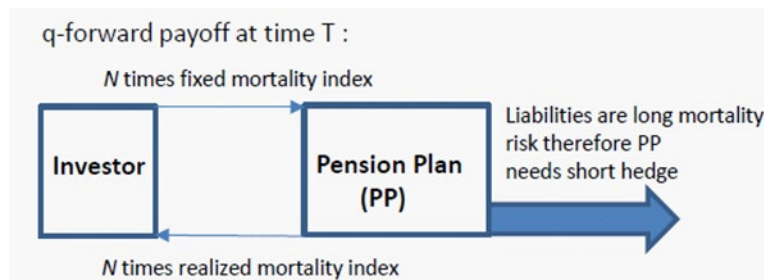
### 3.2 Options de vente K-

Le résultat à l'échéance de la position longue est de  $\mathcal{P}^{(1)}(T, K) = (K - \kappa_T^{(1)})^+$  et sa valeur (prime) au moment  $t < T$  est de  $P^{(1)}(T, K) = (1 + r_f)^{-(T-t)} \mathbb{E}_t^{RA} \left[ (K - \kappa_T^{(1)})^+ \right]$ . Nous supposons toujours (dans le présent document) que  $K = \mathbb{E}_{t_0}^{BE} \left[ \kappa_T^{(1)} \right]$  et nous dirons que l'option de vente est au-jeu (at-the-money).<sup>4</sup>

Nous présentons maintenant les instruments de mortalité.

<sup>4</sup> Nous nous concentrerons ici sur les options de vente et les stratégies d'assurance de portefeuille. Il est également possible de couvrir le portefeuille en vendant des options d'achat, mais la stratégie d'achat couverte n'est déployée que lorsque de petits mouvements de taux de mortalité sont anticipés, car elle n'offre qu'un léger coussin contre des taux de mortalité plus faibles.

### 3.3 Contrats à terme q-



\*Ce graphique est disponible en anglais seulement.

Encore une fois, soit  $N = 1$  \$. Donc, le résultat à l'échéance du point de vue de PP est  $q\mathcal{F}(T, K) = K - q_{x,T}$ , où  $K$  est le taux de mortalité fixe et  $q_{x,T}$  est la mortalité réalisée pour l'âge  $x$  pendant l'année  $T$ . Sa valeur au moment  $t : t_0 \leq t < T$  est

$$\begin{aligned} q\mathcal{F}(T, K) &= (1 + r_f)^{-(T-t)} \mathbb{E}_t^{RA} [q\mathcal{F}(T, K)] \\ &= (1 + r_f)^{-(T-t)} (K - \mathbb{E}_t^{RA} [q_{x,T}]) \end{aligned}$$

Comme d'habitude, nous ne souhaitons pas qu'un paiement initial soit effectué, donc  $qF_{t_0}(T, K) = 0$  et  $K = \mathbb{E}_{t_0}^{RA} [q_{x,T}]$ .

### 3.4 Options de vente q-

Le résultat à l'échéance de la position longue est de  $q\mathcal{P}(T, K) = (K - q_{x,T})^+$  et sa valeur (prime) au moment  $t : t_0 < t < T$  est de  $q\mathcal{P}(T, K) = (1 + r_f)^{-(T-t)} \mathbb{E}_t^{RA} [(K - q_{x,T})^+]$ . Encore une fois, nous supposons  $K = \mathbb{E}_{t_0}^{BE} [q_{x,T}]$  et nous dirons que l'option de vente est au-jeu.

#### 4. Sensibilités, couvertures en q-durées clés et en K-durées clés

Le concept des q-durées clés est attribuable à Li et Luo (2012). L'idée qui y est décrite consiste à utiliser la corrélation des taux de mortalité pour les âges adjacents et les années adjacentes afin de sélectionner les années et les âges intercalés qui rendent compte des sensibilités du portefeuille aux mouvements de la surface des taux de mortalité. Les sensibilités sont calculées au moyen du modèle M7. Des résultats très semblables sont obtenus dans Giannini (2020) pour le modèle de Li-Lee et M5. Nous appliquons directement la méthode de Li et Luo pour calculer les instruments de couverture q- suivants :

Cohorte k	Âge en 2017	$n_k$	Âge et maturité	$w(j,k)$ notionnel
1	68	1	70 (2019)	19,0100
		2	75 (2024)	17,7177
		3	80 (2029)	13,0434
		4	85 (2034)	8,4472
		5	90 (2039)	4,4354
2	72	1	75 (2020)	9,2600
		2	80 (2025)	7,6359
		3	85 (2030)	4,8908
		4	90 (2035)	2,5296
3	76	1	80 (2021)	6,6702
		2	85 (2026)	4,4962
		3	90 (2031)	2,3113
4	80	1	85 (2022)	4,2232
		2	90 (2027)	2,1773

Dans tous nos portefeuilles de couverture de la mortalité, nous retiendrons toujours tous les instruments clés ( $n_k$ ) associés à une cohorte. Nous pouvons donc indexer les portefeuilles que par numéro de cohorte. Nous pouvons donc désigner par  $F_1$ , par exemple, le portefeuille des contrats à terme  $\{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5)\}$ . De même,  $F_{1,2}$  désignera l'ensemble de contrats à terme  $\{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4)\}$ ; etc. Nous utiliserons la notation  $P_1, P_{1,2}$ , etc., de la même façon pour les portefeuilles d'options de vente.

Le concept des K-durées clés, inspiré des q-durées clés de Li et Luo (2012), est développé dans Tan et coll. (2014) et approfondi dans Li et coll. (2019). Comme il a été mentionné, Giannini (2020) a montré que les instruments de couverture fondés sur  $K_t^{(2)}$  contribuaient très légèrement à la réduction des risques; nous nous concentrerons uniquement sur les instruments  $K_t^{(1)}$  pour les durations clés suivantes. Encore une fois, les sensibilités présentées ici sont calculées avec M7, mais Giannini (2020) a montré des résultats très similaires pour M5 et Li-Lee :

	<b>j = 1</b>	<b>j = 2</b>	<b>j = 3</b>	<b>j = 4</b>
Année clé	2022	2027	2032	2037
	-0,07903	-0,6496	-0,5339	-0,4388
	-0,8988	-0,7722	-0,5817	-0,3679
$W_j$ K1	1,1373	1,1887	1,0894	0,8385

## 5. Couverture statique avec instruments de mortalité et instruments K-

### 5.1 Couverture de la mortalité (q-)

Afin de vérifier l'efficacité de la méthode des q-durées clés avec les contrats à terme et les options de vente (séparément), nous avons utilisé M7 pour générer des trajectoires de mortalité puis calculé les statistiques descriptives des distributions des profits et pertes à l'échéance du portefeuille de rentes lorsque des ensembles progressifs d'instruments de couverture étaient utilisés. Des résultats très proches ont été obtenus pour M5 et Li-Lee (voir Giannini 2020). Ces statistiques descriptives ont d'abord été utilisées par Fung et coll. (2019) pour vérifier l'efficacité des swaps et des caps de survie.

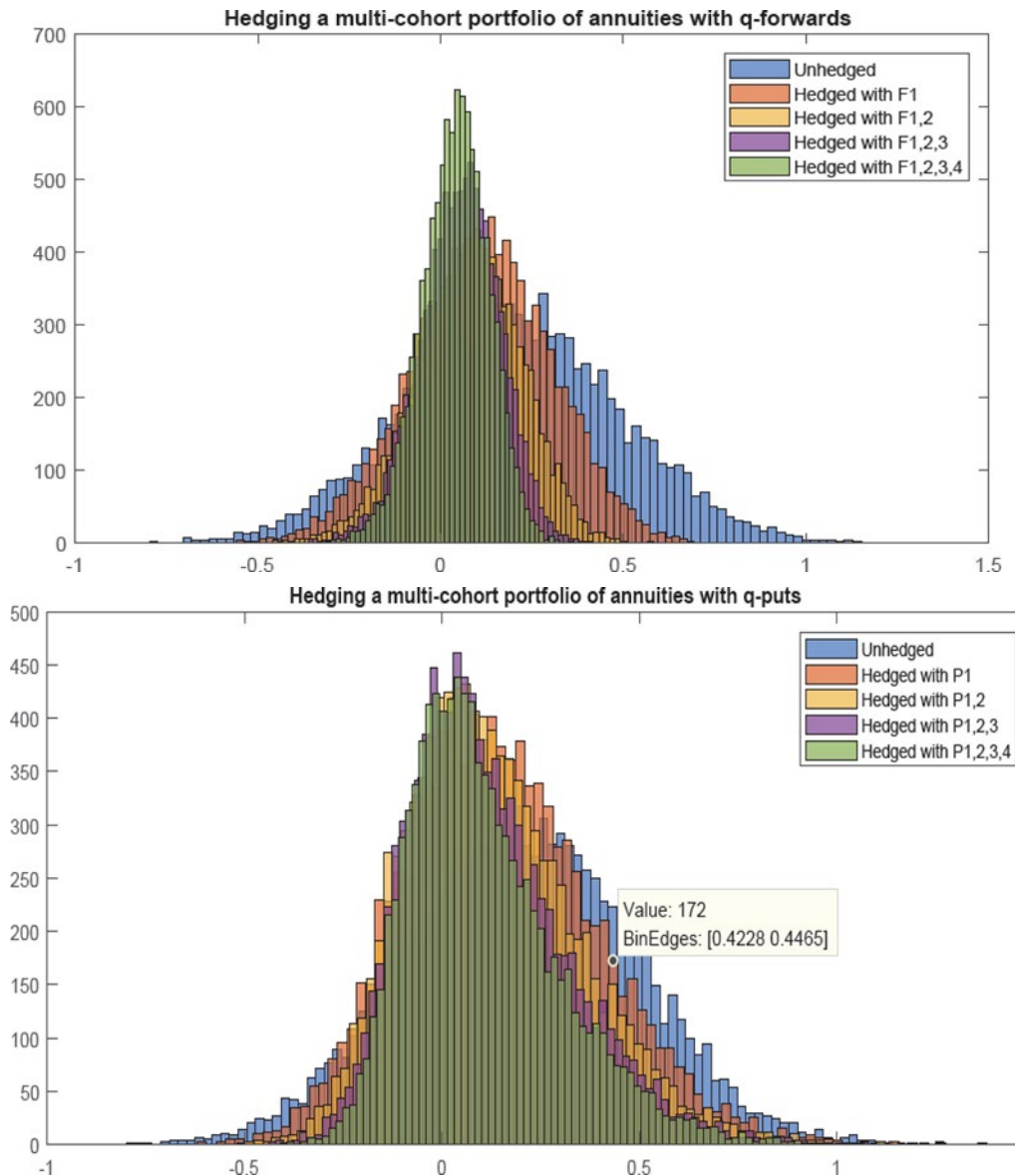
Portefeuille	Moyenne	Écart-type	Asymétrie	Aplatissement	VaR99	ES99
Non couvert	0,1976	0,2880	0,0314	2,9281	-0,4754	-0,5471
F1	0,1144	0,1928	-0,1083	2,9093	-0,3529	-0,4072
F <sub>1,2</sub>	0,0782	0,1446	-0,2002	2,9614	-0,2841	-0,3269
F <sub>1,2,3</sub>	0,0554	0,1108	-0,2561	3,0538	-0,2297	-0,2624
F <sub>1,2,3,4</sub>	0,0428	0,0921	-0,2413	3,1240	-0,1906	-0,2234

Portefeuille	Moyenne	Écart-type	Asymétrie	Aplatissement	VaR99	ES99
Non couvert	0,1976	0,2880	0,0314	2,9281	-0,4754	-0,5471
P <sub>1</sub>	0,1473	0,2433	0,3401	3,1313	-0,3694	-0,4234
P <sub>1,2</sub>	0,1261	0,2205	0,5533	3,3791	-0,3106	-0,3537
P <sub>1,2,3</sub>	0,1132	0,2039	0,7382	3,6741	-0,2652	-0,2990
P <sub>1,2,3,4</sub>	0,1062	0,1930	0,8650	3,9303	-0,2307	-0,2649

Là où VaR99 et ES99 signifient respectivement la valeur à risque et déficit prévu à un niveau de confiance de 99 %.

Si nous devons mesurer l'efficacité des couvertures sous l'angle d'une réduction de l'écart-type des résultats à l'échéance, nous concluons en grande majorité que les couvertures des contrats à terme q- sont supérieures aux couvertures des options de vente. Mais cette mesure ne tient pas compte d'autres caractéristiques ou moments de la distribution, comme son asymétrie en particulier. Si nous examinons plutôt les réductions de la VaR et du déficit prévu, nous obtenons une conclusion plus équilibrée sur l'efficacité

de la couverture de chaque instrument. Dans l'ensemble, les portefeuilles de couverture complets comportant 14 contrats à terme q- ou options de vente q- réduisent le déficit prévu de plus de moitié. En outre, la couverture avec des options de vente est moins coûteuse que celle avec des contrats à terme, même si nos options de vente sont toutes en jeu.



\*Ce graphique est disponible en anglais seulement.

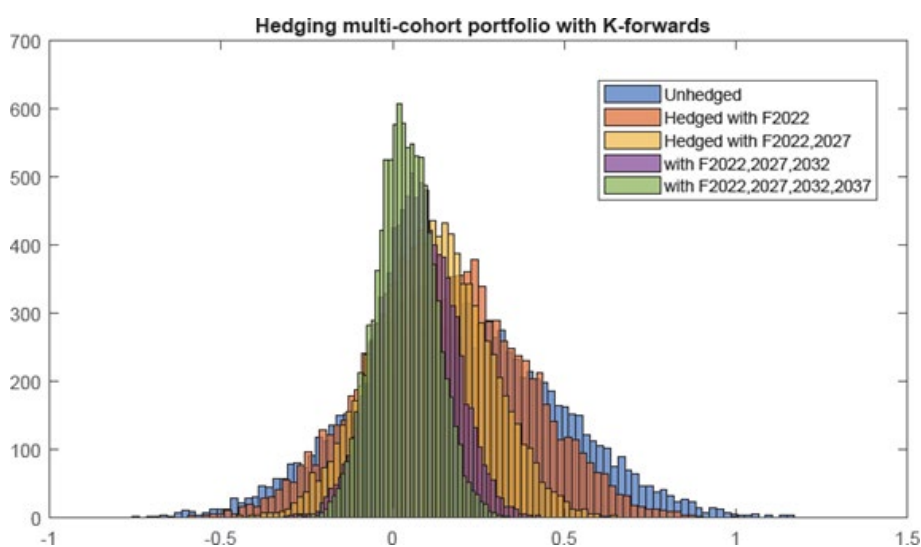
## 5.2 Couverture K-

Testons maintenant la couverture K-. Encore une fois, les résultats obtenus à partir des trois modèles sont très proches. Voici les résultats pour M7 :

Portefeuille	Moyenne	Écart-type	Asymétrie	Aplatissement	VaR99	ES99
Non couvert	0,1946	0,2922	0,0153	2,9387	-0,4748	-0,5617
F <sub>2022</sub>	0,1569	0,2355	0,0105	2,9254	-0,3865	-0,4534
F <sub>2022, 2027</sub>	0,1078	0,1644	-0,0011	2,9614	-0,2697	-0,3183
F <sub>2022, 2027, 2032</sub>	0,0638	0,1985	-0,0123	3,0538	-0,1856	-0,2178
F <sub>2022, 2027, 2032, 2037</sub>	0,0335	0,0850	-0,0391	3,1240	-0,1607	-0,1856

Portefeuille	Moyenne	Écart-type	Asymétrie	Aplatissement	VaR99	ES99
Non couvert	0,1946	0,2922	0,0153	2,9387	-0,4748	-0,5617
P <sub>2022</sub>	0,1722	0,2636	0,1977	3,0065	-0,4027	-0,4692
P <sub>2022, 2027</sub>	0,1423	0,2280	0,5206	3,3173	-0,3020	-0,3504
P <sub>2022, 2027, 2032</sub>	0,1153	0,1985	0,8666	3,9012	-0,2271	-0,2618
P <sub>2022, 2027, 2032, 2037</sub>	0,0967	0,1807	1,0793	4,4658	-0,1971	-0,2265

Comparativement aux couvertures q-, les couvertures K- complètes réduisent encore plus l'écart-type et le déficit prévu. Cela est remarquable puisqu'il n'y a que quatre instruments par rapport à 14. Nous constatons de nouveau les coûts moins élevés des couvertures avec les options de vente K- en jeu :



\*Ce graphique est disponible en anglais seulement.

Voici un résumé des réductions en pourcentage du déficit prévu pour chaque type de couverture dans les trois modèles :

<b>Cohortes :</b>		<b>1</b>	<b>1, 2</b>	<b>1, 2, 3</b>	<b>1, 2, 3, 4</b>
Li-Lee	Contrats à terme q-	28,86 %	44,64 %	56,19 %	63,15 %
	Options de vente q-	25,67 %	39,46 %	49,31 %	55,32 %
CBD (M5)	Contrats à terme q-	25,77 %	40,20 %	51,51 %	58,87 %
	Options de vente q-	22,69 %	35,04 %	44,51 %	50,50 %
CBD (M7)	Contrats à terme q-	25,57 %	40,25 %	52,04 %	59,17 %
	Options de vente q-	22,61 %	35,35 %	45,35 %	51,58 %

<b>Année</b>		<b>2022</b>	<b>2022, 2027</b>	<b>2022, 2027, 2032</b>	<b>2022, 2027, 2032, 2037</b>
Li-Lee	Contrats à terme K1-	23,00 %	48,27 %	63,38 %	62,75 %
	Options de vente K1-	20,10 %	42,49 %	56,39 %	60,36 %
CBD (M5)	Contrats à terme K1-	19,52 %	43,12 %	60,48 %	65,46 %
	Options de vente K1-	16,71 %	37,48 %	53,20 %	59,50 %
CBD (M7)	Contrats à terme K1-	19,28 %	43,33 %	61,22 %	66,96 %
	Options de vente K1-	16,47 %	37,62 %	53,39 %	59,68 %

Chaque tableau montre une certaine variabilité entre les modèles pour chaque portefeuille. Cela est évidemment imputable en partie aux simulations de Monte Carlo et pourrait être traité en utilisant les mêmes nombres aléatoires pour chaque modèle ou en recourant à davantage de simulations et(ou) à l'utilisation de techniques de réduction de la variance. Mais le résultat général que présentent ces chiffres sur le plan de l'efficacité de la couverture est assez cohérent.

Naturellement, la couverture K- à un seul instrument offre une réduction inférieure à celle des cinq contrats à terme q-, mais il est tout à fait remarquable de voir les réductions fournies par les instruments K- s'améliorer avec l'ajout progressif d'un seul instrument K-, au point où les réductions fournies par les couvertures avec trois et quatre instruments K- sont toutes plus élevées que donnent les réductions émanant respectivement des 12 et 14 instruments q- correspondants respectivement.



## 6. Conclusion

Notre étude montre que la mortalité et les contrats à terme K- et les options de vente K- offrent des moyens efficaces de réduire considérablement le risque de longévité dans un portefeuille de rentes à plusieurs cohortes.

Il serait très utile pour les régimes de retraite et les sociétés d'assurances d'avoir des marchés financiers où ils pourraient prendre des positions courtes sur les contrats à terme q- et K- ainsi que des positions longues sur les contrats q- et K- pour couvrir leur risque de longévité. De l'autre côté de ces transactions, nous estimons que les investisseurs sur les marchés de capitaux (outre les opérateurs de couverture de mortalité comme les assureurs et les réassureurs) seraient très intéressés à prendre des positions opposées sur ces instruments afin d'obtenir une prime pour un risque qui est en grande partie non corrélé à leurs risques de marché. Parmi ces produits (et avec les instruments de survie traités dans Giannini 2020), les contrats à terme K- et les options de vente K- sans qu'il soit nécessaire de faire référence spécifiquement à l'âge, et avec des durées clés à cinq ans d'intervalle, par exemple – offrent d'excellentes couvertures nécessitant l'échange de seulement quelques instruments sur le marché. Cela signifie des instruments plus liquides et un rééquilibrage moins coûteux des portefeuilles. Si nous ajoutons à cela la facilité et la transparence du calcul des indices, leur interprétation intuitive du point de vue des variations des taux de mortalité et la propriété d'invariance des données qui rend les indices faciles à gérer, nous obtenons des arguments très convaincants en faveur du développement rapide d'un marché liquide des contrats à terme K- et d'options de vente. Dans le cas des options de vente, l'opérateur de couverture a également la possibilité de choisir la franchise sur l'assurance de portefeuille. Cette rentabilité par rapport au caractère « en-jeu » est le thème principal de Li et coll. (2019) et c'est quelque chose que nous voulons examiner plus tard, ainsi que l'efficacité de la couverture dynamique. Zhou et Li (2019) étudient le risque de couverture delta fondée sur l'interpopulation avec les contrats à terme q-. La couverture dynamique nécessite cependant un marché liquide et bien développé.

## Remerciements

Sullivan Giannini tient à remercier l'Institut canadien des actuaires pour son soutien financier dans le cadre du programme Mitacs Accélération, subvention IT12340. Cette recherche a également été soutenue par une bourse d'études institutionnelles de l'Université de Sherbrooke pour laquelle Sullivan est également très reconnaissant.

## 7. Bibliographie

- Bélanger, A., Robert, C. et F. Fontaine. « The development of a Canadian capital market for longevity-linked securities », texte 2.3 de Claudia Champagne, Frank Coggins, Lyne Latulippe, dans *Éléments de la finance responsable : une perspective multidimensionnelle*, Les éditions Yvon Blais, 2018.
- Cairns, A.J.G., Blake, D., et K. Dowd. « A two-factor model for stochastic mortality with parameter uncertainty: Theory and calibration », *Journal of Risk and Insurance*, vol. 73, n° 4, 2006, pp. 687-718.
- Cairns, A.J.G., Blake, D., Dowd, K et G.D. Coughlan. « A quantitative comparison of stochastic mortality models using data from England and Wales and the United States », *North American Actuarial Journal*, vol. 13, n° 1, 2009, pp. 1–35.
- Chan, W.S., Li, J.S.-H. et J. Li. « The CBD mortality indexes: modeling and applications », *North American Actuarial Journal*, vol. 18, n° 1, 2014, pp. 38-58.
- Fung, M.C., Ignatieva, K. et M. Sherris. « Managing systematic mortality risk in life annuities: an application of longevity derivatives », *Risks*, vol. 7, 2019, n° 1, p. 2.
- Giannini, S. « Modélisation des taux de mortalité et utilisation d'instruments financiers dérivés pour la couverture du risque de longévité », thèse, Université de Sherbrooke, 2020.
- Hunt, A. et D. Blake. *Forward Mortality Rate in Discrete Time I : Calibration and Securities Pricing*, document de travail PI-1511, Pensions Institute, 2015.
- Li, J.-H. et A. Luo. « Key q-duration: a framework for coverage longevity risk », *Bulletin ASTIN*, vol. 42, n° 2, 2012, pp. 413-452.
- Li, J.-H. et A.C.-Y. « Canonical valuation of mortality-linked securities », dans *Journal of Risk and Insurance*, vol. 78, n° 4, 2011, pp. 853-884.
- Li, J.S.-H., Li, J., Balasooriya, U. et K. Zhou. « Constructing out-of-the-money longevity hedges using parametric mortality indexes », dans *North American Actuarial Journal*, vol. 25, n° S1, 2019, pp. S341-S372.
- Li, J.S.-H., Li, J., Tickle, L. et C.I. Tan., *Assessing Basis Risk for Longevity Transactions: Phase 2*, rapport de recherche, Université Macquarie, 2017.
- Liu, Y. et J.S.-H. Li. « A strategy for coverage risks associated with period and cohort effects using q-forward », *Insurance*, dans *Insurance: Mathematics and Economics*, n° 78, 2018, pp. 267-285.
- Tan, C.I., Li, J., Li, J.S.-H. et U. Balasooriya. « Parametric mortality Indexes: from index construction to coverage strategies », *Insurance*, dans *Insurance: Mathematics and Economics*, n° 59, 2014, pp. 285-299.
- Zhou, K.Q. et J.S.-H Li. « Risque de longévité de couverture delta selon le modèle M7-M5 : l'impact de l'incertitude liée à l'effet de cohorte et le risque de base de population », *Insurance*, dans *Insurance: Mathematics and Economics*, n° 84, 2019, pp. 1-21.
- Li, N. et R. Lee. « Coherent mortality forecasts for a Group of Populations. An Extension of the Lee-Carter Method », dans *Demography*, vol. 42, n° 3, 2005, pp. 575-594.