

Document de recherche

L'incidence de la prestation d'une rente de longévité sur la planification du revenu de retraite au Canada

Préparé par :
Rui Zhou, AICA, Université de Melbourne
Johnny S.-H. Li, Université de Waterloo
Kenneth Zhou, AICA, Université de Waterloo

Septembre 2020

Document 220135

*This document is available in English
© 2020 Institut canadien des actuaires*

L'incidence de la prestation d'une rente de longévité sur la planification du revenu de retraite au Canada

Rui Zhou, Johnny S.-H. Li, Kenneth Zhou

La rente de longévité est une rente différée dont les paiements commencent très tard dans la vie, bien après l'âge normal de la retraite. En transférant aux fournisseurs de rentes le risque d'épuisement de l'épargne-retraite à des âges avancés, la rente de longévité procure aux rentiers une sécurité financière accrue plus tard dans la vie. Dans le présent rapport, nous examinons l'incidence de la prestation de rentes de longévité sur la planification du revenu de retraite selon les règles fiscales et le système de retraite du Canada. Un cadre dynamique de cycle de vie est élaboré pour étudier l'augmentation du bien-être et les changements dans les habitudes de consommation découlant de l'offre de rentes de longévité aux retraités canadiens. Pour déterminer les choix optimaux dans le modèle du cycle de vie, nous proposons une méthode de grille endogène générale modifiée (MGEG modifiée) qui traite du problème de non-différentiabilité découlant de règles fiscales et d'un système de retraite réaliste. Ce cadre de cycle de vie et la MGEG modifiée sont également appliqués pour examiner comment les personnes appartenant à différentes classes sociales réagissent à l'accès aux rentes de longévité.

1. Introduction

Compte tenu de l'amélioration rapide de la mortalité que nous avons connue ces dernières années, il est fort probable que les retraités sous-estiment leur espérance de vie et épuisent leurs actifs de retraite. La volatilité du rendement des placements aggrave le problème de la faible croissance potentielle de l'épargne-retraite. La rente constitue une solution reconnue depuis longtemps pour garantir un revenu de retraite. Depuis les travaux précurseurs de Yaari (1965), les économistes se sont mis d'accord sur les avantages sociaux substantiels des rentes immédiates. Ils ont également convenu que les retraités devraient convertir la plupart ou la totalité de leurs actifs en rentes à la retraite. Toutefois, les taux de rente volontaire sont demeurés extrêmement faibles, un phénomène connu comme le « casse-tête des rentes ».

Milevsky (2005) introduit la rente de longévité, aussi appelée rente viagère différée à un âge avancé (RVDAA), comme nouvelle façon d'offrir un revenu de retraite viager. La rente de longévité est une rente différée dont les paiements commencent très tard dans la vie, c'est-à-dire bien après l'âge normal de la retraite. En transférant aux fournisseurs de rentes le risque d'épuisement de l'épargne-retraite à des âges avancés, la rente de longévité procure aux rentiers une sécurité financière accrue plus tard dans la vie. Comme les paiements commencent à des âges très avancés, le coût de la rente de longévité est beaucoup plus faible que celui de la rente immédiate, ce qui réduit la perte de liquidité attribuable à la rente.

La rente de longévité a été rendue accessible pour la première fois aux régimes régis par

l'article 401(k) aux États-Unis en 2014. Plus de dix assureurs cotés A (selon A.M. Best) ou mieux¹ aux États-Unis offrent actuellement ce produit. Même si les ventes de rentes de longévité ont récemment augmenté, leur part du marché des rentes est encore faible. Le budget fédéral canadien de 2019 instaure également la RVDAA et permet son acquisition dans le cadre des régimes enregistrés d'épargne-retraite (REER), des fonds enregistrés de revenu de retraite (FERR), des régimes de participation différée aux bénéficiaires (RPDB), des régimes de pension agréés collectifs (RPAC) et des régimes de pension agréée à cotisations déterminées (RPA).

Les recherches en cours sur les rentes de longévité sont principalement menées aux États-Unis. Gong et Web (2010) étudient la valeur monétaire de la rente de longévité et comparent les stratégies de décumulation de la richesse des retraités avec et sans rente de longévité. Leurs résultats montrent que la rente de longévité procure une proportion importante de la protection contre le risque de longévité offerte par la rente immédiate à un coût bien moindre. Toutefois, les hypothèses utilisées dans le présent document sont restrictives, comme un pourcentage fixe du patrimoine converti en rente de longévité, des projections déterministes de la mortalité, un taux d'intérêt constant et un rendement constant des placements. Plus récemment, Pfau et coll. (2016) ont cherché à savoir si l'utilisation d'une rente de longévité en combinaison avec des plans de retraite systématique produit un revenu prévu plus élevé comportant le même risque, comparativement à l'utilisation de rentes immédiates à prime unique ou de rentes viagères à option de retrait garantie. Horneff et coll. (2016) développe un modèle réaliste du cycle de vie d'une personne aux États-Unis et mesure l'amélioration du bien-être dû à l'inclusion des rentes de longévité dans les paiements d'un régime selon l'article 401(k). Les chercheurs ont conclu que l'accès à une rente de longévité augmente le bien-être de 5 à 20 % et que le pourcentage optimal de l'actif du régime converti en rente de longévité est de 8 à 15 %. Bien que ces études fournissent de précieux renseignements pour les retraités canadiens, les règles fiscales, le système de retraite et le système de soins de santé du Canada diffèrent de ceux des États-Unis. Ces différences peuvent avoir une incidence importante sur les conclusions.

Dans le présent rapport, nous examinons l'incidence de la provision de rentes de longévité sur la planification du revenu de retraite selon des règles fiscales canadiennes réalistes et des hypothèses démographiques propres au Canada. Plus précisément, nous élaborons un modèle de cycle de vie pour la planification du revenu de retraite qui permet des modèles stochastiques pour l'expérience de mortalité et le rendement des placements. Les décisions optimales touchant la consommation et l'épargne sont déterminées en maximisant l'utilité à vie d'un Canadien représentatif.

Le modèle du cycle de vie est une approche économique standard qui permet d'examiner les choix de vie, y compris la consommation, l'épargne, l'investissement et l'offre de main-d'œuvre. Horneff et coll. (2016) ont élaboré un modèle du cycle de vie pour mesurer l'amélioration du bien-être des retraités des États-Unis en raison de l'inclusion des rentes de longévité dans les paiements d'un régime selon l'article 401(k). Notre étude, axée sur les retraités canadiens, diffère de celle de Horneff et coll. (2016). Notre modèle du cycle de vie

¹ www.forbes.com/sites/mattcarey/2018/08/13/qlac-pricing-improves-as-more-insurers-offer-product-bond-yields-rise/#43dd501b36e0

intègre les règles fiscales canadiennes et applique des modèles de mortalité stochastiques étalonnés en fonction des taux de mortalité historiques canadiens. Nous adoptons le modèle de Lee-Carter (Lee et Carter, 1992) largement utilisé pour les données nationales sur la mortalité au Canada, et le modèle de facteur de commentaires augmenté (Li et Lee, 2005) pour la mortalité du groupe des pensions du RPC.

Pour résoudre le problème d'optimisation, nous proposons une MGEG modifiée. La méthode des grilles endogènes (MGE), proposée pour la première fois par Carroll (2006), nécessite beaucoup moins de temps de calcul que l'approche traditionnelle d'itération de la fonction de valeur (IFV) en évitant les intégrations numériques itératives. Druedahl et Jørgensen (2017) généralisent la MGE pour relever plusieurs défis découlant de modèles de cycle de vie complexes, y compris l'insuffisance des conditions de premier ordre (CPO), l'absence d'information préalable sur la question de savoir si les contraintes sont exécutoires, et un réseau endogène irrégulier. Une étape cruciale de la MGEG consiste à diviser le problème d'optimisation en segments et à évaluer la fonction de valeur pour chaque segment. Druedahl et Jørgensen (2017) supposent que la fonction de valeur est différentiable pour chaque segment. Toutefois, les règles fiscales réalistes et le système de revenu de retraite supposés dans notre analyse introduisent des anomalies dans le processus de gestion du patrimoine et, par conséquent, des points non différentiables. Pour permettre une fonction de valeur non différentiable, nous proposons une nouvelle approche de segmentation fondée sur les valeurs seuils utilisées pour l'impôt des particuliers et le revenu de retraite.

À l'aide du modèle proposé de cycle de vie et de la MGEG modifiée, nous examinons l'augmentation du bien-être et les changements dans les habitudes de consommation découlant de l'offre de rentes de longévité aux retraités canadiens. Nous étudions de plus près la façon dont les personnes appartenant à différentes classes socioéconomiques réagissent à l'accès aux rentes de longévité. Les classes socioéconomiques influencent non seulement le revenu, mais aussi l'expérience de mortalité d'une personne. Dans la présente analyse, nous examinons la relation entre les classes socioéconomiques et l'expérience de mortalité observée dans les données sur la mortalité du Régime de pensions du Canada (RPC) et nous intégrons cette relation au modèle du cycle de vie. Les données du RPC sur la mortalité classent les retraités en 11 groupes selon le montant de la rente du RPC reçue et fournissent l'expérience de mortalité historique pour chaque groupe de rentes. Puisque le revenu gagné et le nombre d'années travaillées au cours de la vie active déterminent le montant de la rente du RPC, les groupes de pensions peuvent être considérés comme un indicateur des classes socioéconomiques des pensionnés.

Le rapport est structuré comme suit : à la section 2, nous décrivons le système canadien de revenu de retraite; à la section 3, nous présentons en profondeur la rente de longévité; à la section 4, nous adaptions le modèle largement utilisé de Lee-Carter aux données de mortalité canadiennes; à la section 5, nous élaborons le modèle du cycle de vie; à la section 6, nous présentons la MGEG modifiée; à la section 7, nous montrons les tendances simulées de consommation et d'épargne avec et sans accès à une rente de longévité pour un homme Canadien; à la section 8, nous examinons l'incidence de la classe socioéconomique sur l'expérience de mortalité et nous intégrons cet effet à l'évaluation des gains d'utilité découlant

de l'accès à une rente de longévité; enfin, à la section 9, nous présentons la conclusion du rapport.

2. Le système canadien de revenu de retraite

2.1 Les trois piliers

Le revenu de retraite canadien provient habituellement de trois sources :

- Le RPC ou le Régime de rentes du Québec (RRQ);
- La Sécurité de la vieillesse (SV);
- Les régimes de retraite d'employeur, ainsi que l'épargne et les placements personnels

Les trois ressources sont souvent reconnues comme les trois piliers du système canadien de revenu de retraite. Ils diffèrent en ce qui concerne les sources de financement, le traitement fiscal, ainsi que la façon et le moment de prélever les paiements. Ces différences influencent sensiblement la façon dont les personnes épargnent en vue de leur retraite et utilisent leur épargne pendant leur retraite. Nous décrivons donc en détail les trois piliers dans les sous-sections suivantes. Nous insistons plus particulièrement sur un citoyen canadien qui a vécu et travaillé en Ontario pendant toute sa vie.

2.2 RPC/RRQ

Presque toutes les personnes de plus de 18 ans qui travaillent au Canada, hors Québec, et qui gagnent plus que le montant d'exemption de base doivent verser des cotisations au RPC. Le RPC est en vigueur partout au Canada, sauf au Québec, où le RRQ offre des prestations semblables. Comme nous effectuons l'analyse pour un citoyen canadien vivant en Ontario dans le présent document, nous fournissons des détails portant exclusivement sur le RPC.

Le montant des cotisations au RPC est déterminé par le montant de l'exemption de base, les gains ouvrant droit à pension et le taux de cotisation.

- Montant de l'exemption de base : Le montant de l'exemption de base est de 3 500 \$ en 2018. Si le revenu annuel est inférieur à 3 500 \$, aucune cotisation n'est versée au RPC.
- Gains ouvrant droit à pension : Les gains ouvrant droit à pension équivalent au revenu annuel plafonné à un montant maximal fixé en janvier de chaque année en fonction des augmentations du salaire moyen au Canada au cours de l'année précédente. Le maximum des gains annuels ouvrant droit à pension est de 55 900 \$ en 2018.
- Taux de cotisation : Le taux de cotisation sur les gains ouvrant droit à pension est de 9,9 % en 2018, réparti également entre l'employeur et le salarié. Les travailleurs autonomes paient le plein montant de 9,9 %.

Dénotons le salaire moyen de l'année t par AW_t et les gains annuels d'un employé de l'année t par Y_t . Supposons que le montant de l'exemption de base et le taux de cotisation ne varieront pas au cours des prochaines années. La cotisation annuelle du salarié ou de l'employeur au RPC au cours de l'année t peut être exprimée comme suit :

$$0.5 \times 9.9\% \times \max\left(\min\left(Y_t, 55900 \frac{AW_{t-1}}{AW_{2017}}\right) - 3500, 0\right).$$

Par conséquent, la cotisation maximale pour l'employeur et l'employé en 2018 est de 2 593,80 \$ chacun.

L'âge normal à partir duquel la rente de retraite du RPC peut être versée correspond au mois suivant le 65^e anniversaire. Toutefois, le versement de la rente du RPC peut débuter dès l'âge de 60 ans, auquel cas le montant de la rente est réduite, ou après l'âge de 65 ans, auquel cas le montant de la rente est majorée. Le montant de la rente du RPC est déterminé selon le nombre d'années de cotisation au RPC pendant la période d'emploi et le montant des cotisations. De façon générale, la rente du RPC est proportionnelle au montant des cotisations versées et à la période de cotisation.

Le calcul du montant de la rente du RPC permet d'éliminer certaines périodes au cours desquelles les gains des particuliers ont été relativement faibles ou nuls. Mentionnons deux exclusions courantes : l'exclusion générale et la clause d'exclusion pour élever des enfants. L'exclusion générale permet de soustraire du calcul jusqu'à 17 % de la période de cotisation de base où les gains ont été les plus faibles. Cette disposition s'applique à tous les cotisants au RPC. La clause d'exclusion pour élever des enfants permet d'éliminer les périodes où les gains sont moindres en raison de la garde d'un enfant à charge de moins de sept ans. Un exemple de calcul du montant de la rente du RPC figure à l'annexe A.

En pratique, le montant de la rente du RPC augmente en fonction de l'Indice des prix à la consommation (IPC), mais demeure inchangé lorsque l'IPC diminue. Dans le présent document, nous supposons qu'il n'y a pas d'inflation et que le montant de la rente du RPC demeure inchangé. Le RPC prévoit d'autres prestations, comme la prestation d'invalidité et la prestation de survivant. Nous ne tiendrons compte que de la rente de retraite du RPC, car notre analyse numérique reposera sur une personne célibataire en bonne santé.

2.3 SV

Le programme de la SV, qui comprend la rente de la SV, le Supplément de revenu garanti (SRG), les allocations et l'allocation au survivant, est financé par les revenus généraux du gouvernement du Canada. Une personne ne contribue pas directement au programme.

La rente de la SV et le SRG dépendent du revenu de l'année précédente. Le montant mensuel maximal de la rente de la SV, peu importe l'état matrimonial, est de 589,59 \$ en 2018. Si le revenu mondial annuel net de l'année précédente dépasse le seuil (75 910 \$ pour 2018), l'impôt de récupération sera déduit du montant de la rente de la SV au taux de 0,15 \$ pour chaque dollar de revenu au-delà du seuil jusqu'à ce que le montant de la rente de la SV atteigne 0. Le plafond et le seuil de la rente de la SV augmentent tous deux en fonction de l'IPC. En pratique, le montant mensuel de la rente de la SV et le montant seuil sont rajustés sur une base trimestrielle et annuelle, respectivement. Par souci de commodité, nous supposons que les deux sont rajustés une fois l'an. Le montant de la rente de la SV reçu au cours de l'année t peut être formulé ainsi :

$$\max\left(12 \times 589.59 \frac{CPI_{t-1}}{CPI_{2017}} - 0.15 \max\left(Y_t - 75910 \frac{CPI_{t-1}}{CPI_{2017}}, 0\right), 0\right)$$

Il est facile de vérifier que le plafond du revenu annuel donnant droit à la rente de la SV est de 123 077 \$ pour 2018. Il convient de noter que le montant de la rente de la SV est traité comme un revenu imposable.

Le SRG est une prestation mensuelle non imposable versée aux bénéficiaires de la rente de la SV qui ont un faible revenu et qui vivent au Canada. Le montant du SRG dépend de l'état matrimonial et du revenu de l'année précédente. Le montant mensuel maximal du SRG pour un retraité vivant seul est de 880,61 \$. Le montant réel du SRG est déterminé à l'aide d'un ensemble de tables de taux complexes² et il diminue de façon presque linéaire par rapport au revenu (à l'exclusion de la pension de la SV et du SRG). Le revenu annuel maximal du SRG est de 17 880 \$ pour un retraité vivant seul. Nous appliquons une régression linéaire aux montants du SRG indiqués dans le tableau des taux du SRG, d'après les niveaux de revenu correspondants. Nous constatons que le montant du SRG reçu au cours de l'année t peut être calculé par approximation comme suit :

$$\max\left(12 \times 880.61 \frac{CPI_{t-1}}{CPI_{2017}} - 0.5909Y_t, 0\right)$$

L'allocation peut être versée à une personne âgée de 60 à 64 ans dont l'époux ou le conjoint de fait touche la rente de la SV et est admissible au SRG. L'allocation au survivant peut être versée à une personne veuve âgée de 60 à 64 ans. Nous ne fournissons pas de détails sur l'allocation et l'allocation au survivant puisque notre analyse porte sur une personne célibataire.

2.4 Régimes de retraite d'employeur, ainsi que l'épargne et les placements personnels

L'employé et l'employeur versent régulièrement des cotisations aux régimes de retraite d'employeur, comme les REER collectifs ou les RPA. Il existe deux types principaux de régimes de retraite d'employeur : les régimes à cotisations déterminées (CD) et les régimes à prestations déterminées (PD). Notre analyse porte uniquement sur les régimes à cotisations déterminées. Une personne peut également ouvrir un compte REER auprès de sa banque. La cotisation annuelle totale à un RPA et à un REER est limitée à 18 % du revenu gagné au cours de l'année précédente, à concurrence d'un montant maximal fixé à 26 230 \$ en 2018. Dans le présent rapport, nous utilisons les RPA/REER afin de représenter le régime de retraite d'employeur et le REER individuel par souci de simplicité. Puisque les cotisations versées à un RPA ou à un REER sont déductibles d'impôt, le RPA ou le REER offre d'importants incitatifs fiscaux aux personnes à revenu élevé.

Le 31 décembre de l'année au cours de laquelle une personne atteint l'âge de 71 ans est le dernier jour où elle peut cotiser à un REER. Au cours de l'année où une personne atteint cet âge, les fonds des RPA et des REER doivent être :

- Retirés;
- Transférés à un FERR; ou

²www.canada.ca/content/dam/canada/employment-social-development/migration/documents/assets/portfolio/docs/en/cpp/oas/sv-oas-jul-sept-2019.pdf

- Utilisés pour acheter une rente.

Souvent, le retrait simultané de tous les montants des RPA et des REER ne représente pas la meilleure stratégie, car les retraits sont traités comme un revenu auquel s'applique l'impôt sur le revenu des particuliers. Aucun impôt n'est retenu lorsque les fonds des RPA et des REER sont transférés directement à un FERR ou utilisés pour acheter une rente. Toutefois, l'impôt sur le revenu doit être payé au début du versement des montants du FERR ou de la rente. Un retrait minimum d'un FERR, dont le montant dépend de l'âge du retraité, doit être effectué chaque année une fois les sommes converties. Les gains réalisés dans un FERR sont exonérés d'impôt.

Outre les REER, un autre régime enregistré d'épargne assorti d'incitatifs fiscaux est le programme de compte d'épargne libre d'impôt (CELI), qui a débuté en 2009. Un Canadien de 18 ans et plus peut investir dans un CELI en franchise d'impôt tout au long de sa vie. Bien que les cotisations à un CELI ne soient pas déductibles d'impôt, le revenu gagné dans le compte est généralement libre d'impôt, même lorsqu'il est retiré. Les cotisations au CELI sont limitées à 5 500 \$ pour l'année 2018. Le plafond de cotisation annuel du CELI est indexé à l'inflation et il est arrondi à la tranche de 500 \$ le plus près. Les droits inutilisés de cotisation à un CELI peuvent être reportés aux années suivantes. Le plafond de cotisation du CELI est déterminés par le plafond annuel en dollars, majoré des droits inutilisés de cotisation de l'année précédente et par tout retrait effectué sur le CELI de l'année précédente.

3. Rente de longévité

La rente de longévité, proposée pour la première fois par Milevsky (2015), comme mentionné plus haut, est une rente tardive dont le versement débute à un âge avancé. Elle a l'avantage d'être peu coûteuse et d'offrir une sécurité du revenu aux personnes âgées. Supposons qu'une personne prend sa retraite lorsqu'elle atteint 65 ans au début de l'année t et qu'elle convertit une partie de son épargne-retraite en rente de longévité dont le versement commence à compter de l'âge x_1 . Dénotons $m_{x,t}$ le taux central de mortalité d'une personne de x ans durant l'année t . En supposant une force constante de mortalité entre des âges entiers, la probabilité de décès de cette personne au cours de l'année t est de $q_{x,t} = 1 - e^{-m_{x,t}}$. La probabilité de survie de cette personne âgée de x au début de l'année t aux années T peut s'écrire comme suit :

$${}_T S_{x,t} = \prod_{j=0}^{T-1} (1 - q_{x+j,t+j})$$

La valeur actualisée d'une rente de longévité émise à une personne de x ans au début de l'année t avec un versement de 1 \$ à l'avance à compter de x_a ans peut être exprimée comme suit :

$${}_{x_a-x} \ddot{a}_{x,t} = \sum_{i=x_a-x}^{\omega-x-1} (1+r)^{-i} S_{x,t}$$

où r est le taux de rendement obtenu par le fournisseur de la rente et ω est l'âge limite. Nous supposons que personne ne vit au-delà de 100 ans et donc $\omega = 100$.

La rente de longévité procure un important avantage fiscal. Un RVDAA prévoit un versement régulier au plus tard à la fin de l'année au cours de laquelle le rentier atteint l'âge de 85 ans en vertu du plan budgétaire fédéral canadien de 2019, tandis que le versement d'une rente

enregistrée débutera au plus tard à la fin de l'année au cours de laquelle le rentier atteint l'âge de 71 ans en vertu des règles existantes. Les paiements de rente à un âge avancé donnent lieu à un report d'impôt puisqu'ils sont imposés au taux marginal d'imposition du revenu des particuliers. De plus, le calcul du retrait minimal des comptes enregistrés exclut la valeur de l'actif convertie en RVDAA. Par conséquent, l'achat au titre de la RVDAA réduit le retrait minimal requis des comptes enregistrés, ce qui donne lieu à d'autres reports d'impôt. L'achat de la RVDAA sera limité à 25 % de la valeur du compte enregistré à la fin de l'année précédente et il sera assujéti à une limite cumulative de 150 000 \$ qui sera indexée. Un traitement fiscal et une limite d'achat semblable s'appliquent à la rente de longévité autorisée dans un régime selon l'article 401(k) aux États-Unis.

4. Modélisation de la mortalité

4.1 Modèle de Lee-Carter

Les taux de mortalité déterminent l'espérance de vie d'une personne et le coût de la rente de longévité. Par conséquent, les taux de mortalité jouent un rôle important dans les choix que fait une personne pour planifier sa retraite. Pour illustrer la dynamique de la mortalité, nous recourons au modèle de Lee-Carter largement utilisé. Dans sa forme originale (Lee et Carter, 1992), ce modèle peut s'exprimer mathématiquement sous la forme

$$\ln(m_{x,t}) = \beta_x^{(0)} + \beta_x^{(1)}\kappa_t, \quad (1)$$

où $m_{x,t}$ dénote le taux central de mortalité à l'âge x et dans l'année t , $\beta_x^{(0)}$ est le niveau de mortalité moyen (sur l'échelle logarithmique) au fil du temps, $\beta_x^{(1)}$ représente la sensibilité par âge au facteur variable dans le temps et κ_t , régit la dynamique des taux centraux de mortalité à tous les âges. Les paramètres $\beta_x^{(0)}$, $\beta_x^{(1)}$ et κ_t peuvent être obtenus par estimation du maximum de vraisemblance (EMV) en supposant que le nombre de décès pour l'âge x dans l'année t , $D_{x,t}$, suit une loi de Poisson de moyenne égale à $E_{x,t}m_{x,t}$, où $E_{x,t}$ est le nombre d'expositions au risque pour l'âge x dans l'année t . La fonction logarithmique de vraisemblance peut être exprimée comme suit :

$$\sum_{t=t_0}^{t_1} \sum_{x=x_0}^{x_1} D_{x,t} \ln[E_{x,t}m_{x,t}] - E_{x,t}m_{x,t} - \ln[D_{x,t}!],$$

où $[t_0, t_1]$ représente la période échantillonnée, $[x_0, x_1]$ la fourchette d'âge de l'échantillon et $D_{x,t}!$ la fonction factorielle de $D_{x,t}$.

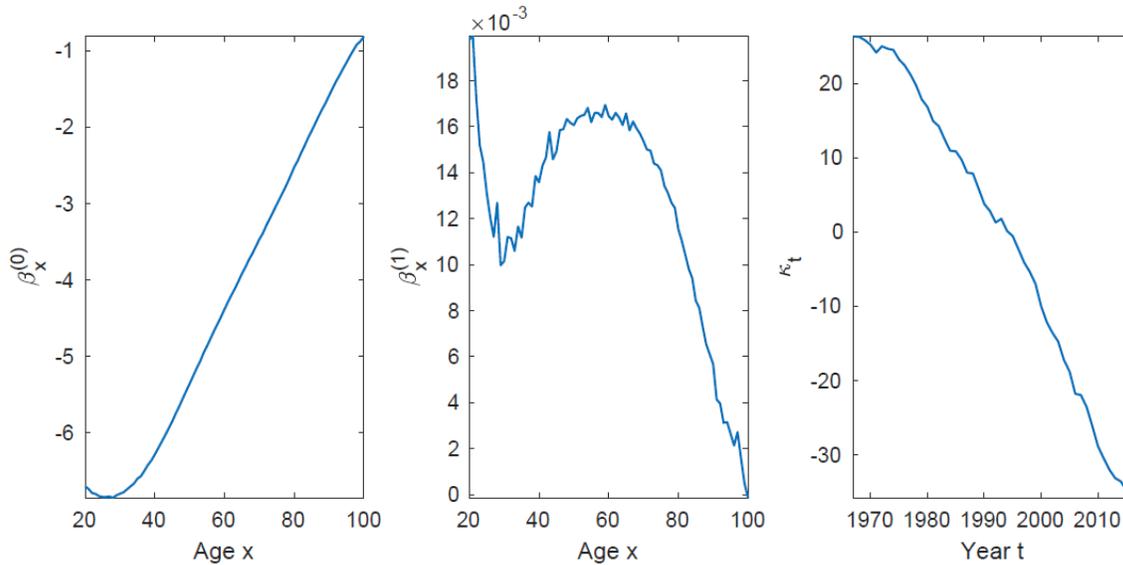
4.2 Données sur la mortalité

Nous utilisons deux ensembles de données sur la mortalité dans notre analyse. Le premier ensemble est constitué des données sur la mortalité des hommes au Canada, tirées de la Human Mortality Database³ (HMD) pour la tranche d'âge de 20 à 100 ans et la période d'échantillonnage de 1967 à 2016. Le deuxième ensemble est constitué des données sur la mortalité des hommes selon le RPC, d'après le groupe d'âge des 65 à 89 ans et la période échantillonnée de 1991 à 2015. Dans la présente section, nous utilisons les données de la HMD

³ <https://www.mortality.org/>

pour illustrer l'estimation du modèle de Lee-Carter. Nous fournirons plus de détails sur les données du RPC à la section 8.1.

Graphique 1 : Estimations des paramètres de Lee-Carter pour les hommes canadiens à partir des données de la HMD



*Disponible en anglais seulement.

Les paramètres estimatifs obtenus au moyen des données de la HMD et les derniers graphiques qui représentent les intervalles de confiance à 90 % des paramètres d'intervalle sont présentés dans le graphique 1. Les intervalles de confiance des estimations des paramètres sont obtenus au moyen de la méthode bootstrap proposée par Brouhns et coll. (2005) avec 1 000 échantillons bootstrap. Chaque échantillon du nombre de décès à l'âge x au cours de l'année t est produit comme nombre aléatoire à partir d'une loi de Poisson dont la moyenne équivaut au nombre réel de décès à l'âge x au cours de l'année t . L'intervalle de confiance de l'estimation de $\beta_x^{(0)}$ est très étroit et presque inobservable, tandis que l'intervalle de confiance de l'estimation de $\beta_x^{(1)}$ est beaucoup plus large. L'estimation de κ_t affiche une tendance à la baisse, ce qui indique une diminution des taux de mortalité au fil du temps.

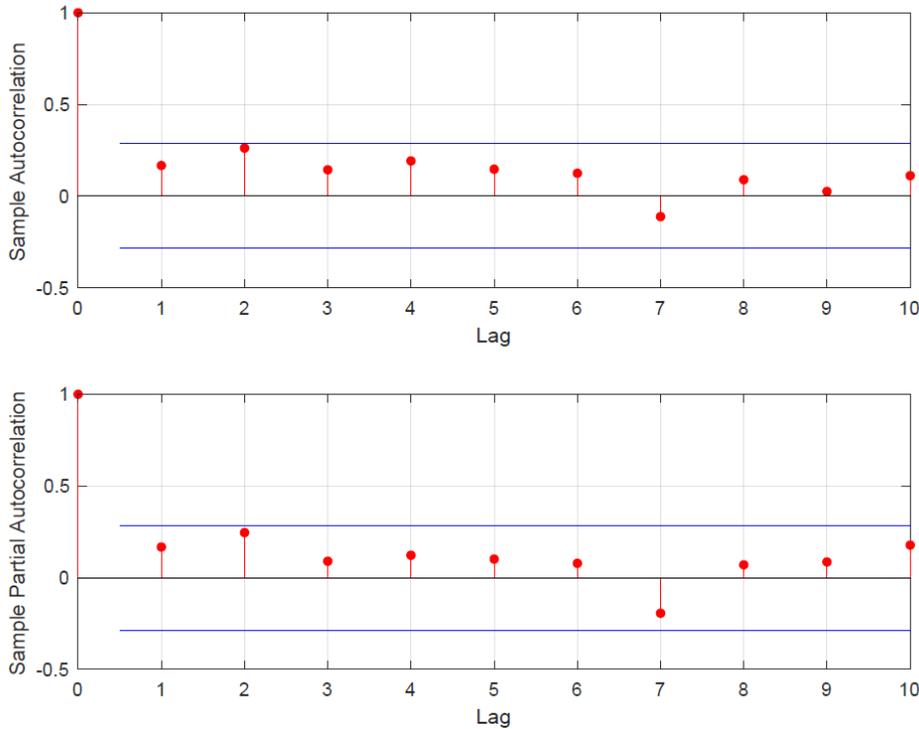
Nous modélisons davantage la série estimée κ_t par un processus de séries chronologiques. Puisque l'échantillon de la fonction d'autocorrélation (FAC) et la fonction d'autocorrélation partielle (FACP) de $\kappa_{t+1} - \kappa_t$ sont toutes deux non significatives pour les décalages jusqu'à 10, comme le montre le graphique 2, nous sélectionnons une marche aléatoire avec dérive pour modéliser κ_t . Ce modèle simple pour κ_t rend l'optimisation du modèle du cycle de vie plus facile à gérer. La marche aléatoire avec modèle de dérive pour κ_t peut être formulée comme suit :

$$\kappa_{t+1} = \kappa_t + \mu + \sigma Z_{t+1},$$

où μ et σ sont des constantes, et $\{Z_t\}$ est une séquence de variables i. i. d. aléatoires normales standard.

Les estimations de μ et de σ à l'aide de l'échantillon initial sont $-1,2668$ and $0,9027$ respectivement. Les intervalles de confiance à 90 % de l'estimation de μ et de σ obtenue à l'aide de la méthode du bootstrap sont $[-1,2790; -1,2544]$ et $[0,8311; 0,9756]$ respectivement.

Graphique 2 : Exemples de graphiques FAC et FACP pour $\kappa_{t+1} - \kappa_t$



*Disponible en anglais seulement.

Puisque les composantes d'âge estimées $\beta_x^{(0)}$ et $\beta_x^{(1)}$ ne changent pas au fil du temps, l'incertitude de la prévision de mortalité provient uniquement de l'incertitude de la prévision de κ_t . Pour simuler les trajectoires de mortalité pour la période future $\in [t_1 + 1, t_1 + n]$, nous simulons d'abord les valeurs de z_t pour $t \in [t_1 + 1, t_1 + n]$, puis nous calculons les valeurs correspondantes de κ_t et $m_{x,t}$.

5. Un modèle de cycle de vie

5.1 La configuration

Supposons un Canadien qui a 25 ans au début de 2018 et qui vit en Ontario pendant toute sa vie. Pour simplifier les notations, nous représentons l'année civile 2018 avec l'année 1. Cette personne gagne un salaire annuel Y_t au cours de l'année t ; ce montant lui est versé à l'avance au début de l'année. En supposant que nous sachions exactement combien cette personne gagne chaque année, il n'y a aucune incertitude quant à Y_t . Son employeur et lui versent

chacun une cotisation de 4,55 % au RPC (la moitié du taux de cotisation de 9,9 % en 2018) de la rémunération admissible (calculée en fonction du salaire annuel). Son employeur verse 5 % de son salaire annuel dans le RPA, qui est un régime à cotisations déterminées. L'employé ne verse pas de cotisations au RPA, mais il affecte un certain montant de son salaire annuel à son REER, sous réserve de la limite de cotisation totale à un RPA/REER de $0.18Y_t$. Ce montant sera déterminé dans les sous-sections suivantes par l'optimisation du modèle du cycle de vie. Par souci de simplicité, nous ne permettons pas le report prospectif des droits de cotisation à un REER⁴.

Sans perte de généralité, nous supposons que le salaire moyen et l'IPC demeurent inchangés dans les années à venir. Par conséquent, les valeurs en dollars exprimées dans le présent rapport peuvent être considérées comme des valeurs en dollars réels ou des valeurs corrigées en fonction de l'inflation. La cotisation au RPC versée par l'employé ou l'employeur peut être simplifiée comme suit :

$$cCPP_t = 0.5 \times 9.9\% \times \max(\min(Y_t, 55900) - 3500, 0).$$

À titre d'employé, cette personne verse également des cotisations d'assurance-emploi (AE). Ces cotisations sont déterminées en fonction des taux d'assurance-emploi et de la rémunération assurable jusqu'à concurrence d'un montant maximal. Le taux de cotisation d'assurance-emploi payé par l'employé est de 1,66 \$ par tranche de 100 \$ de rémunération assurable et le maximum de la rémunération assurable est de 51 700 \$ en 2018. L'employeur paie 1,4 fois le montant des cotisations de l'employé. Les cotisations d'assurance-emploi versées par l'employé peuvent être formulées comme suit :

$$EI_t = \frac{1.66 \times \max(Y_t, 51700)}{100}$$

Cette personne paie de l'impôt sur ses gains. Le tableau 1 présente les tranches et les taux d'imposition combinés du gouvernement fédéral et de l'Ontario, y compris les surtaxes, pour les résidents de l'Ontario. Nous représentons l'impôt total à payer par Tax_t . Dans le calcul de l'impôt sur le revenu des particuliers, nous excluons des gains annuels les cotisations au RPC, aux RPA des employés et aux REER individuels, ainsi que les cotisations d'AE qui sont toutes déductibles d'impôt.

Au cours des 30 premières années de sa vie professionnelle, l'employé est présumé consacrer 30 % de son revenu annuel au logement, y compris les paiements de location de logement ou d'hypothèque, le chauffage et la climatisation, et l'impôt foncier. Puisque la Société canadienne d'hypothèques et de logement limite habituellement le ratio d'amortissement brut de la dette (ADB) à 35 % et le ratio d'amortissement total de la dette (ATD) à 42 %⁵, 30 % des gains annuels sur le logement constituent une estimation raisonnable. Une fois l'hypothèque remboursée dans 30 ans, nous supposons que les frais de logement seront réduits à 10 % du revenu annuel. Nous utilisons H_t pour indiquer les frais de logement à l'année t :

⁴ Si nous permettons le cumul des droits de cotisation à un REER, une variable d'état supplémentaire est nécessaire dans le modèle du cycle de vie, ce qui complique le calcul.

⁵ Le ratio du ADB est le pourcentage du revenu annuel brut qui est consacré aux « frais hypothécaires » – principal, intérêts, impôts fonciers et frais de chauffage, plus les frais d'entretien des condominiums. Le ratio du ATD évalue le revenu annuel brut nécessaire pour tous les paiements de dettes (logement, cartes de crédit, prêts personnels et prêts automobiles).

$$H_t = \begin{cases} 30\% \times Y_t, & \text{si } 1 \leq t \leq 30 \\ 10\% \times Y_t, & \text{si } t > 30 \end{cases} .$$

Le solde des gains après déduction des paiements de l'AE, du RPC, des RPA/REER, de l'impôt et des frais de logement peuvent être utilisés pour la consommation ou déposés dans un CELI.

Tableau 1 : Tranches et taux d'imposition combinés du gouvernement fédéral et de l'Ontario, y compris les surtaxes

Revenu imposable de 2018	Autres revenus	Gains en capital	Dividendes canadiens	
			Admissibles	Non admissibles
Première tranche de 42 960 \$	20,05 %	10,03 %	-6,86 %	7,81 %
Plus de 42 960 \$ jusqu'à 46 605 \$	24,15 %	12,08 %	-1,20 %	12,57 %
Plus de 46 605 \$ jusqu'à 75 657 \$	29,65 %	14,83 %	6,39 %	18,95 %
Plus de 75 657 \$ jusqu'à 85 923 \$	31,48 %	15,74 %	8,92 %	21,07 %
Plus de 85 923 \$ jusqu'à 89 131 \$	33,89 %	16,95 %	12,24 %	23,87 %
Plus de 89 131 \$ jusqu'à 93 208 \$	37,91 %	8,95 %	17,79 %	28,53 %
Plus de 93 208 \$ jusqu'à 144 489 \$	43,41 %	21,70 %	25,38 %	34,91 %
Plus de 144 489 \$ jusqu'à 150 000 \$	46,41 %	23,20 %	29,52 %	38,39 %
Plus de 150 000 \$ jusqu'à 205 842 \$	7,97 %	23,98 %	31,67 %	40,20 %
Plus de 205 842 \$ jusqu'à 220 000 \$	51,97 %	25,98 %	37,19 %	44,84 %
Plus de 220 000 \$	53,53 %	26,76 %	39,34 %	46,65 %

L'employé prend sa retraite à 65 ans et il convertit une partie de son RPA/REER en rente de longévité, qui prévoit des versements réguliers à partir de 80 ans. Pour éviter l'exigence de retrait minimal d'un FERR et optimiser la souplesse de retrait dans la mesure du possible, l'employé ne convertit le solde du RPA/REER en FERR qu'à 71 ans. Une fois le RPA/REER converti en FERR, l'exigence de retrait minimal d'un FERR s'applique à la valeur du FERR, à l'exception de la portion convertie en rente de longévité. Outre les retraits d'un RPA, d'un REER ou d'un FERR, l'employé touche également des prestations du RPC, de la SV et du SRG à partir de 65 ans. Il convient de noter que les prestations du RPC et de la SV sont imposables, mais que celles du SRG ne le sont pas. Dénotons le montant de la rente du RPC, de la rente de la SV et du SRG pour l'année t par $pCPP_t$, OAS_t et GIS_t respectivement.

5.2 Ressources et décisions

Nous partageons les ressources financières de la personne au début de l'année t en ressources liquides m_t et en ressources illiquides n_t . Soit y_t comme le revenu net de l'année t . Pour une personne pendant sa vie professionnelle, nous avons

$$y_t = Y_t - cCPP_t - EI_t - Tax_t - H_t \text{ pour } t \leq 40$$

Veillez noter que le revenu annuel Y_t pour l'année t est gagné au début de l'année et que les retenues de cotisations au RPC, de cotisations d'assurance-emploi, d'impôt sur le revenu et de frais de logement sont effectuées en même temps que le paiement du revenu. Les ressources liquides m_t au début de l'année t au cours de la vie professionnelle comprennent le solde du CELI de l'année précédente et le revenu net y_t gagné au début de cette année. Les ressources illiquides n_t réfère au solde du RPA/REER au début de l'année t , qui comprend les cotisations à un RPA de l'employeur et les cotisations de la personne à un REER au cours des années précédentes.

Deux décisions sont prises au début de l'année t sur la façon de dépenser le revenu net y_t : consommation c_t et cotisation à un REER d_t . Le solde sera investi dans le CELI à titre de ressources liquides. Les cotisations à un REER sont plafonnées. Puisque l'employeur verse au RPA l'équivalent de 5 % des gains avant impôt et que les droits de cotisation inutilisés à un REER ne sont pas reportés, la cotisation maximale au REER pour l'année t est de $(0.18 - 0.05)Y_t$. Nous posons également la condition qu'aucune somme ne peut être retirée d'un REER avant la retraite. Par conséquent, le solde des RPA/REER après la décision au moment t , b_t peut être formulé comme suit

$$b_t = n_t + d_t,$$

où $0 \leq d_t \leq 0.13Y_t$. Les ressources liquides postérieures à la décision pour l'année t , a_t peuvent être exprimées ainsi

$$a_t = m_t - c_t - d_t + g(d_t),$$

où $g(d_t)$ est le remboursement d'impôt qui arrive immédiatement après le versement des cotisations d_t à un REER et $g(d_t) < d_t$. Les ressources liquides postérieures à la décision a_{t-1} sont présumées investies dans un CELI et générer un rendement de placement libre d'impôt. Par souci de simplicité, nous supposons qu'il n'y a pas de plafond annuel de cotisation au CELI.

Pour les RPA/REER et le CELI, la personne applique une stratégie de placement simple : $(100 - age)\%$ en actions et $age\%$ en titres à revenu fixe ou en espèces, qui fournissent le même rendement de placement. En pratique, les actifs de retraite sont investis à long terme et rapportent donc généralement davantage que les actifs liquides comme le CELI. Compte tenu du rendement des placements du CELI, les ressources liquides préalables à la décision au début de l'année $t + 1$ peuvent prendre la forme suivante

$$m_{t+1} = e^{R_t}a_t + y_{t+1},$$

où R_t est le taux de rendement des placements pour les actifs liquides et illiquides au cours de l'année t . Le solde du REER avant la décision au début de l'année $t + 1$ est de

$$n_{t+1} = e^{R_t}b_t + 0.05Y_{t+1},$$

où $0.05Y_{t+1}$ est la cotisation de 5 % de l'employeur sur les gains avant impôt Y_{t+1}

Lorsque la personne atteint l'âge de 65 ans au moment 40, elle prend sa retraite et détermine

la portion de son actif de RPA/REER qui devrait être utilisée pour acheter une rente de longévité avec versements réguliers à partir de 80 ans. Nous supposons que le prix de la rente de longévité est juste et qu'il équivaut donc à la valeur actualisée attendue des prestations de rente futures. Dénotons L le paiement annuel de la rente de longévité achetée. Le prix d'achat de la rente de longévité est égal à ${}_{15|}\ddot{a}_{65,41} \cdot L$, où ${}_{15|}\ddot{a}_{65,41}$ est la valeur actualisée d'une rente différée de 1 \$ sur 15 ans versée à l'avance à un homme de 65 ans au début de l'année 41. Le versement de la rente commence au début de l'année 56 si le rentier est toujours vivant à la date du paiement.

Au début de l'année t pendant la retraite, le revenu de la personne comprend la rente du RPC, celle de la SV, le SRG et la rente de longévité, le cas échéant. En soustrayant l'impôt de récupération de la rente de la SV, l'impôt sur le revenu des particuliers et les frais de logement du revenu, nous obtenons le revenu net de la personne y_t et

$$y_t = pCPP_t + OAS_t + GIS_t + L \cdot 1_{\{t \geq 56\}} - Tax_t - H_t, \text{ pour } t \geq 41.$$

Le montant de la rente de la SV et du SRG inclus dans le revenu net est déterminé d'après le revenu total provenant du RPC et de la rente de longévité. L'incidence du retrait d'un REER ou d'un FERR sur le montant de la SV et du SRG sera prise en compte séparément. Tels que définis précédemment, les actifs liquides m_t comprennent le solde du CELL et le revenu net, et n_t représente le solde du RPA, du REER ou du FERR. Après avoir pris des décisions concernant la consommation c_t et le retrait d'un RPA, d'un REER ou d'un FERR d_t , les actifs postérieurs à la décision au début de l'année t sont exprimés comme suit

$$a_t = m_t - c_t - d_t + g(d_t),$$

$$b_t = n_t + d_t - {}_{15|}\ddot{a}_{65,41} \cdot L \times 1_{\{t=41\}},$$

où d_t est négatif et assujéti à l'exigence de retrait minimal d'un FERR après l'âge de 71 ans, et $g(d_t)$ est également négatif et représente l'impôt supplémentaire qui doit être payé pour le retrait d'un RPA, d'un REER ou d'un FERR et la réduction du montant de la SV et du SRG attribuable au retrait d'un RPA, d'un REER ou d'un FERR.

Les ressources préalables aux décisions au début de l'année $t + 1$ sont ensuite représentées par

$$m_{t+1} = e^{R_t} a_t + y_{t+1},$$

$$n_{t+1} = e^{R_t} b_t.$$

5.3 Maximiser l'utilité attendue au cours de la vie

L'utilité attendue au cours de la vie d'une personne de 25 ans à l'instant 0 est définie comme suit :

$$\sum_{t=1, \dots, 75} \beta^{t-1} \mathbb{E}[u(c_t)],$$

où β est le facteur d'actualisation de préférence temporelle et $u(\cdot)$ est la fonction d'utilité. Nous supposons que la fonction d'utilité présente une aversion relative constante pour le risque, et donc

$$u(c) = \frac{c^{1-\gamma}}{1-\gamma},$$

où γ est le paramètre d'aversion relative pour le risque.

Notre objectif consiste à trouver les décisions (c.-à-d. les valeurs de c_t et de d_t) qui maximisent l'utilité attendue au cours de la vie. Pour formuler les règles de décision optimales, nous appliquons le principe d'optimalité de Bellman (Bellman, 1957), qui précise que :

Principe d'optimalité : Une politique optimale renferme une propriété selon laquelle, peu importe l'état initial et la décision initiale, les décisions restantes doivent constituer une politique optimale en ce qui concerne l'état résultant de la première décision.

Au début de l'année t , pour $1 \leq t \leq 40$, les ressources m_t et n_t et l'expérience de mortalité la plus récente κ_{t-1} sont connues et définies comme variables d'état, à partir desquelles des choix sont faits. En appliquant le principe de l'optimalité, nous obtenons l'équation de Bellman exprimée comme suit :

$$V_t(m_t, n_t, \kappa_{t-1}) = \max_{c_t, d_t} u(c_t) + \beta \mathbb{E}[p_{25+t-1,t} V_{t+1}(m_{t+1}, n_{t+1}, \kappa_t) | m_t, n_t, \kappa_{t-1}],$$

s.t.

$$\begin{aligned} a_t &= m_t - c_t - d_t + g(d_t), \\ b_t &= n_t + d_t, \\ m_{t+1} &= e^{R_t} a_t + y_{t+1}, \\ n_{t+1} &= e^{R_t} b_t + 0.05 Y_{t+1}, \\ y_t &= Y_t - EI_t - cCPP_t - Tax_t - H_t, \\ \kappa_t &= \kappa_{t-1} + \mu + \sigma Z_t, \\ c_t &> 0, \\ 0 &\leq d_t \leq u d_t, \\ c_t + d_t - g(d_t) &\leq m_t, \end{aligned}$$

où $V_t(m_t, n_t, \kappa_{t-1})$ est la fonction de valeur représentant la valeur maximale pouvant être obtenue, compte tenu de l'état actuel; $p_{25+t-1,t} = 1 - q_{25+t-1,t}$; et $u d_t = 0.13 Y_t$ est la cotisation maximale au régime de retraite de l'employé. La contrainte $c_t + d_t - g(d_t) \leq m_t$ sous-entend que $a_t \geq 0$ et que l'on ne peut emprunter pour consommer. La fonction de valeur $V_t(m_t, n_t, \kappa_{t-1})$ comprend l'utilité de la consommation au cours de la période courante $u(c_t)$ et la valeur de continuation actualisée $\beta \mathbb{E}[p_{25+t-1,t} V_{t+1}(m_{t+1}, n_{t+1}, \kappa_t) | m_t, n_t, \kappa_{t-1}]$. L'équation de Bellman définit une relation récursive pour la fonction de valeur. Pour résoudre cette équation, nous devons commencer par la dernière année et remonter jusqu'à l'année en cours. Par conséquent, nous devons d'abord formuler l'équation de Bellman pour $41 \leq t \leq 75$, puis réexaminer la résolution de l'équation.

À l'âge de la retraite, soit 65 ans (au début de l'année 41), nous supposons que la personne

détermine d'abord la proportion des RPA/REER à convertir en rente de longévité et, par conséquent, le paiement annuel de la rente de longévité L . Étant donné que les décisions futures touchant la consommation et les retraits de la rente dépendent du versement attendu de la rente de longévité achetée, L est une variable d'état à compter de l'année 42. Pendant les années de retraite, le retraité décide de sa consommation c_t et du retrait de sa rente d_t au début de chaque période. Le retrait peut être effectué à partir d'un RPA ou d'un REER avant l'âge de 71 ans et dans un FERR après l'âge de 71 ans. L'équation de Bellman pour l'année $41 \leq t \leq 75$ peut s'écrire comme suit :

$$\begin{aligned}
& V_t(m_t, n_t, \kappa_{t-1}, L) \\
& = \\
& \begin{cases} \max_{c_t, d_t, L} u(c_t) + \beta \mathbb{E}[p_{25+t-1, t} V_{t+1}(m_{t+1}, n_{t+1}, \kappa_t, L) | m_t, n_t, \kappa_{t-1}], & t = 41, \\ \max_{c_t, d_t} u(c_t) + \beta \mathbb{E}[p_{25+t-1, t} V_{t+1}(m_{t+1}, n_{t+1}, \kappa_t, L) | m_t, n_t, \kappa_{t-1}, L], & 42 \leq t \leq 74, \end{cases} \\
& \text{s.t.}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_t &= m_t - c_t - d_t + g(d_t), \\
b_t &= n_t + d_t -_{15|} \ddot{a}_{65,41} \cdot L \cdot 1_{\{t=41\}}, \\
m_{t+1} &= e^{Rt} a_t + y_{t+1}, \\
n_{t+1} &= e^{Rt} b_t, \\
y_t &= pCPP_t + OAS_t + GIS_t + L \cdot 1_{\{t \geq 56\}} - Tax_t - H_t, \\
k_t &= k_{t-1} + \mu + \sigma z_t, \\
c_t &\geq 0, \\
ld_t &\leq |d_t| \leq n_t, \\
0 &\leq c_t + d_t - g(d_t) \leq m_t \\
0 &\leq_{15|} \ddot{a}_{65,41} \cdot L \leq 0.25 n_{41},
\end{aligned}$$

où ld_t représente le retrait minimal requis d'un FERR et $0 \leq_{15|} \ddot{a}_{65,41} \cdot L \leq 0.25 n_{41}$, la limite de 25 % sur l'achat d'une rente de longévité.

Enfin, nous examinons l'année 75, au début de laquelle la personne atteint l'âge de 99 ans. Puisque le retraité décèdera assurément avant l'âge limite de 100 ans et que tout patrimoine restant après son décès n'aura aucune utilité, il devrait retirer tous les actifs du FERR et consommer tout son patrimoine. Par conséquent, les choix optimaux pour $t = 75$ sont

$$\begin{aligned}
c_t^* &= m_t + n_t - g(n_t), \\
d_t^* &= -n_t.
\end{aligned}$$

Les actifs postérieurs à la décision sont $a_{75} = 0$ et $b_{75} = 0$. Puisqu'il n'y a pas de valeur de continuation, la fonction de valeur de $t = 75$ peut s'écrire ainsi :

$$V_t(m_t, n_t, \kappa_{t-1}, L) = u(c_t^*) = u(m_t + n_t - g(n_t)).$$

Pour résoudre l'équation de Bellman, nous commençons à la dernière année de vie de la

personne et nous remontons à l'année en cours. Les choix optimaux pour l'année 75 présentent une forme d'analyse simple. Toutefois, de telles solutions analytiques optimales n'existent pas pour d'autres années en raison de la complexité du problème. Les choix optimaux sont habituellement déterminés de façon numérique à l'aide de l'IFV (voir Horneff et coll., 2016), qui construit une grille exogène pour les variables d'état préalables à la décision et permet d'obtenir les choix optimaux pour chaque point de la grille exogène pour les années 74, 73..., 1 de façon séquentielle. Des suppositions itératives des choix optimaux sont établies pour chaque point de la grille. Pour chaque estimation, nous évaluons la fonction de valeur $V_t(m_t, n_t, \kappa_{t-1}, L)$ qui consiste à calculer l'espérance avec l'intégration numérique et l'interpolation de la fonction de valeur de l'année suivante. Les estimations sont effectuées de façon itérative en utilisant la force brute, la méthode de Newton ou d'autres méthodes. L'itération s'arrête lorsque la fonction de variation de valeur est plus petite qu'une valeur de tolérance préétablie. En raison des évaluations itératives de la fonction de valeur, l'IFV est très longue.

6 Méthode de grille endogène générale modifiée

6.1 Résolution du problème d'optimisation par la méthode de la grille endogène

Carroll (2006) propose la MGE qui évite la recherche itérative dans l'IFV et qui nécessite donc beaucoup moins de temps de calcul. Le principe fondamental de la MGE consiste à spécifier une grille exogène sur l'état postérieur à la décision plutôt que sur les états préalables à la décision. La fonction de valeur peut être reformulée comme suit :

$$\tilde{V}_t(a_t, b_t, \kappa_{t-1}) = \max_{c_t, d_t} u(c_t) + \beta w_t(a_t, b_t, \kappa_{t-1}). \quad (2)$$

où $w_t(a_t, b_t, \kappa_{t-1})$ est la fonction de valeur de continuation telle que définie à l'annexe B. Supposons que la fonction de valeur de continuation est différentiable en ce qui concerne c_t et d_t et que les contraintes de choix ne sont pas exécutoires. Les choix optimaux uniques peuvent être trouvés en résolvant les CPO si la fonction d'objectif d'optimisation est concave et l'ensemble de choix est convexe.

En utilisant la MGE, nous construisons d'abord une grille exogène pour l'état postérieur à la décision $[a_t, b_t, \kappa_{t-1}]$. Pour chaque point de cette grille, nous évaluons la fonction de la valeur de continuation et ses dérivés, puis nous déterminons les choix optimaux. Puisque les variables d'état préalables à la décision sont déterminées de façon endogène, la grille construite à partir de leurs valeurs est appelée grille endogène. Une description plus détaillée de la MGE se trouve à l'annexe B. L'avantage de la MGE porte sur le fait que les choix optimaux sont trouvés sans optimisation numérique, un processus itératif et long. La valeur de continuation, qui représente l'espérance par rapport aux variables de la période suivante, n'est prise qu'une seule fois pour chaque point exogène de la grille. Par contre, l'optimisation numérique utilisée dans l'IFV nécessite des procédures itératives qui calculent l'espérance dans chaque itération.

Druedahl et Jørgensen (2017) discutent des trois défis que pose la généralisation de la MGE appliquée à des modèles multidimensionnels avec non-convexités et contraintes.

- Grilles endogènes irrégulières : En raison de la non-linéarité des équations d'Euler (3)

et (4), les points endogènes de la grille préalables à la décision sont espacés de façon inégale.

- CPO insuffisantes : Lorsque la fonction objective n'est pas concave, les CPO ne sont que nécessaires, mais pas suffisantes. Plusieurs points peuvent satisfaire les CPO.
- Aucune connaissance préalable des contraintes exécutoires⁶ : Dans des modèles multidimensionnels comportant de multiples contraintes, on ne connaît pas à priori l'endroit dans l'espace d'états où les contraintes sont exécutoires.

Druedahl et Jørgensen (2017) proposent une MGE généralisée pour relever ces défis. Leur méthode n'exige pas une quantité suffisante de CPO ni une connaissance préalable de la question de savoir si les contraintes sont exécutoires. Elle propose des choix optimaux de points sur une grille exogène régulière par rapport aux états préalables à la décision. La MGEG divise le problème d'optimisation en segments dans lesquels on sait si les choix sont limités, et la fonction de valeur est évaluée. Druedahl et Jørgensen (2017) démontrent que la MGEG est environ 20 fois plus rapide qu'une mise en œuvre très optimisée de l'IFV, les deux méthodes étant conçues pour atteindre un niveau de précision donné. On trouvera une comparaison détaillée de la vitesse et de l'exactitude entre la MGEG et l'IFV dans Druedahl et Jørgensen (2017).

Pour une personne qui travaille au temps t , pour $t < 40$, nous appliquons les procédures suivantes pour déterminer les choix optimaux de points sur une grille exogène régulière par rapport aux états préalables à la décision :

1. Construire une grille exogène régulière commune $\mathcal{G}_t^{m,n,\kappa}$ par rapport aux états préalables à la décision (m_t, n_t, κ_{t-1}) .
2. Pour chaque segment,
 - a. Construire une grille régulière commune $\mathcal{G}_t^{m,n,\kappa}$ par rapport aux états postérieurs à la décision (a_t, b_t, κ_{t-1}) .
 - b. Déterminer les choix optimaux pour chaque point de la grille régulière commune $\mathcal{G}_t^{a,b,\kappa}$ en utilisant des CPO.
 - c. Déterminer l'état préalable à la décision correspondant à chaque point de la grille postérieure à la décision $\mathcal{G}_t^{a,b,\kappa}$. Construire la grille endogène par rapport à l'état préalable à la décision (m_t, n_t, κ_{t-1}) .
 - d. Déterminer les choix optimaux et évaluer $V_t(m_t, n_t, \kappa_{t-1})$ pour chaque point de la grille exogène $\mathcal{G}_t^{m,n,\kappa}$ au moyen d'une interpolation de la grille exogène.
3. Pour chaque point de la grille exogène régulière commune $\mathcal{G}_t^{m,n,\kappa}$, le choix optimal est effectué à partir du segment ayant la valeur de choix la plus élevée.

Pour résoudre l'équation de Bellman pour un retraité au moment t , pour $t < 40$, nous ajoutons le paiement de la rente de longévité L à titre de variable d'état. Nous construisons une grille exogène régulière commune $\mathcal{G}_t^{m,n,\kappa,L}$ par rapport à l'état préalable à la décision $(m_t, n_t, \kappa_{t-1}, L)$ et une grille exogène régulière commune $\mathcal{G}_t^{a,b,\kappa,L}$ par rapport à l'état

⁶ Une contrainte est réputée exécutoire si elle modifie également la solution optimale, tandis qu'une contrainte qui n'affecte pas la solution optimale n'est pas exécutoire.

postérieur à la décision $(a_t, b_t, \kappa_{t-1}, L)$. Les étapes restantes sont les mêmes que celles décrites ci-dessus pour la personne qui travaille. L'équation de Bellman est résolue à rebours à partir de 99 ans, 98 ans, 97 ans, ..., jusqu'à 25 ans, de sorte que l'utilité à vie est optimisée.

6.2 Segments

L'évaluation par segment représente l'étape cruciale de la MGEG pour relever le défi de l'absence de connaissance préalable des contraintes exécutoires. La segmentation devrait permettre d'identifier les contraintes exécutoires dans chaque segment.

Pour une personne sur le marché du travail, il existe deux options : la consommation et la cotisation à un REER. Lorsque c_t n'est pas limité, la consommation optimale est toujours positive car une consommation nulle conduit à une utilité infiniment négative. Par conséquent, $c_t > 0$ n'est pas exécutoire. En supposant que la personne ne peut emprunter pour consommer, la consommation devrait être une valeur telle que $a_t \geq 0$. Pour les cotisations à un REER, nous supposons qu'elles sont toujours non négatives et qu'elles doivent être inférieures à $ud_t = 0.13Y_t$.

L'algorithme de la MGEG proposé par Druedahl et Jørgensen (2017) suppose que la fonction de valeur est différentiable en ce qui concerne c_t et d_t . Si cette hypothèse est retenue dans notre configuration, nous devrions envisager six segments :

1. $a_t = 0$ et $d_t = 0$ (c_t et d_t sont tous deux limités)
2. $a_t = 0$ et $d_t = ud_t$ (c_t et d_t sont tous deux limités)
3. $a_t = 0$ et $d_t \in (0, ud_t)$ (c_t est limité, mais d_t ne l'est pas)
4. $a_t > 0$ et $d_t = 0$ (d_t est limité, mais c_t ne l'est pas)
5. $a_t > 0$ et $d_t = ud_t$ (d_t est limité, mais c_t ne l'est pas)
6. $a_t > 0$ et $d_t \in (0, ud_t)$ (aucun des choix n'est limité)

Pour un retraité, $d_t < 0$ pour un retrait de rente et d_t est assujéti à un retrait minimum obligatoire. L'intervalle de d_t est donc divisé en $d_t = -b_t$, $d_t = ud_t$ et $d_t \in (-b_t, ud_t)$ où $-ud_t$ est le montant minimal du retrait.

6.3 Prise en compte de la fonction de valeur non différentiable

Pour un travailleur, les cotisations à un REER sont déductibles d'impôt. Dans le cas d'une personne retraitée, le retrait d'un REER est considéré comme un revenu imposable. De plus, le montant de la rente de la SV et du SRG est réduit lorsque les autres revenus reçus par une personne à la retraite dépassent certains seuils. Ces seuils donnent lieu à un certain nombre d'anomalies dans $g(d_t)$. Par conséquent, $g(d_t)$ est également une fonction linéaire par morceaux de d_t et la fonction de valeur ne peut pas toujours être différenciée en ce qui concerne d_t .

Pour résoudre le problème de différentiabilité, nous fractionnons davantage le domaine de d_t en intervalles plus petits. Supposons qu'il y ait $n + 1$ seuils de revenu, $\{h_0, h_1, \dots, h_n\}$, où

$h_0 = 0$. Le taux d'imposition qui s'applique à la tranche de revenu (h_j, h_{j+1}) est de rt_{j+1} . Le taux d'imposition de rt_{n+1} s'applique à la tranche de revenu de (h_n, ∞) . Il est évident que $g(d_t)$ ne peut être différencié si $Y_t - d_t$ tombe à l'une des valeurs seuils.

Supposons $Y_t \in (h_i, h_{i+1})$. Soit $\hat{n} = \min_j$ s. t. $Y_t - h_j \leq ud_t$. Nous fractionnons le domaine de d_t dans les segments suivants :

- Segment d.1 : $(0, Y_t - h_i)$
- Segment d.2 : $(Y_t - h_i, Y_t - h_{i-1})$
- Segment d.3 : $(Y_t - h_{i-1}, Y_t - h_{i-2})$
- ...
- Segment d. $(i - \hat{n} + 1)$: $(Y_t - h_{\hat{n}+1}, Y_t - h_{\hat{n}})$
- Segment d. $(i - \hat{n} + 2)$: $(Y_t - h_{\hat{n}}, ud_t)$
- Segment d. $(i - \hat{n} + 3)$: 0
- Segment d. $(i - \hat{n} + 4)$: $Y_t - h_i$
- Segment d. $(i - \hat{n} + 5)$: $Y_t - h_{i-1}$
- ...
- Segment d. $(2(i - \hat{n} + 2))$: $Y_t - h_{\hat{n}}$
- Segment d. $(2(i - \hat{n} + 2) + 1)$: ud_t

$g(d_t)$ est une fonction linéaire, différentiable de d_t sur chacun des segments d.1 à d. $(i - \hat{n} + 2)$ et $g_d(d_t) = rt_{i+1}, rt_i, \dots, rt_{\hat{n}}$ respectivement. Toutefois, $g(d_t)$ n'est pas différentiable à $d_t = 0, Y_t - h_i, \dots, Y_t - h_{\hat{n}}, ud_t$.

Pour chaque segment de d_t , nous considérons à la fois les segments avec contraintes c_t ($a_t = 0$) ou les segments sans contraintes c_t ($a_t > 0$). Par conséquent, il existe des segments $4(i - \hat{n}) + 6$ pour c_t et d_t au total. Nous évaluerons la fonction de valeur et nous ferons des choix pour chaque segment. Les choix qui engendrent la fonction de valeur la plus élevée parmi tous les segments représentent la solution optimale. De plus amples détails sur l'évaluation de la fonction de valeur par segment sont présentés à l'annexe C. Dans le cas d'un retraité, une approche semblable est adoptée pour permettre une fonction de valeur non différentiable.

6.4 Simulation de scénarios

À l'aide des choix optimaux et de la fonction de valeur déterminés pour tous les points possibles sur la grille régulière commune $\mathcal{G}_t^{m,n,\kappa,L}$ ou $\mathcal{G}_t^{m,n,\kappa}$, nous pouvons utiliser la simulation et l'interpolation pour étudier la tendance de la consommation future et des dépôts/retraits de REER en suivant les procédures suivantes :

1. Soit $t = 1$. Nous avons $m_t = y_0$ et $n_t = 0$. κ_{t-1} est connu.
2. Déterminer les choix optimaux c_t et d_t en utilisant une interpolation linéaire sur les choix optimaux obtenus pour la grille régulière commune $\mathcal{G}_t^{m,n,\kappa}$. Simuler le rendement des placements et le taux de mortalité pour l'année t et calculer m_{t+1} , n_{t+1} , et κ_t

- d'après les valeurs simulées.
3. Répéter l'étape 3 pour $t = 2, 3, \dots, 40$.
 4. Pour $t = 41$, déterminer les choix optimaux c_t , d_t et L en utilisant une interpolation linéaire par rapport aux choix optimaux obtenus pour la grille régulière commune $\mathcal{G}_t^{m,n,\kappa}$. Simuler le rendement des placements et le taux de mortalité pour l'année t et calculer m_{t+1} , n_{t+1} , et κ_t d'après les valeurs simulées.
 5. Pour $t = 41, 42, \dots, 74$, déterminer les choix optimaux c_t et d_t , et L en utilisant une interpolation linéaire par rapport aux choix optimaux obtenus pour la grille régulière commune $\mathcal{G}_t^{m,n,\kappa,L}$. Simuler le rendement des placements et le taux de mortalité pour l'année t et calculer m_{t+1} , n_{t+1} , et κ_t d'après les valeurs simulées.
 6. Pour $t = 75$, les choix optimaux sont $d_t = -n_t$ et $c_t = m_t - d_t + g(d_t)$.

7 Résultats fondés sur les données canadiennes sur la mortalité des hommes

7.1 Utilité et comportements à vie simulés

La configuration du cycle de vie suppose que la personne atteint l'âge de 25 ans au début de 2018 et que la valeur de κ_t pour l'année 2017 ($t = 0$) est connue dès le début. Toutefois, les données canadiennes sur la mortalité de la HMD ne dépassent pas l'année 2016. Pour combler l'écart, nous utilisons la prévision moyenne de κ_t pour l'année 2017 comme valeur connue.

Nous supposons que le taux d'intérêt effectif annuel sans risque est de 1 % et que le rendement annuel des actifs à risque suit une loi log-normal $LN(0.04, 0.2)$. Le paramètre de préférence temporelle β est fixé à 0,97. Le paramètre d'aversion pour le risque γ est fixé à 5. Nous utilisons une quadrature gaussienne de dix points pour établir de façon approximative l'espérance aux fins du calcul de la valeur de continuation. La grille commune comporte dix points pour chaque dimension.

La personne gagne le salaire moyen au Canada pour son âge. Son salaire avant impôt Y_t à l'année t à l'âge $25 + t - 1$ suit une fonction cubique. Les paramètres de la fonction cubique sont estimés en faisant correspondre les salaires, les traitements et les commissions moyens par groupe d'âge pour les hommes canadiens en 2017; ces données figurent au tableau 2. En minimisant les erreurs quadratiques, nous obtenons la fonction salariale estimée suivante :

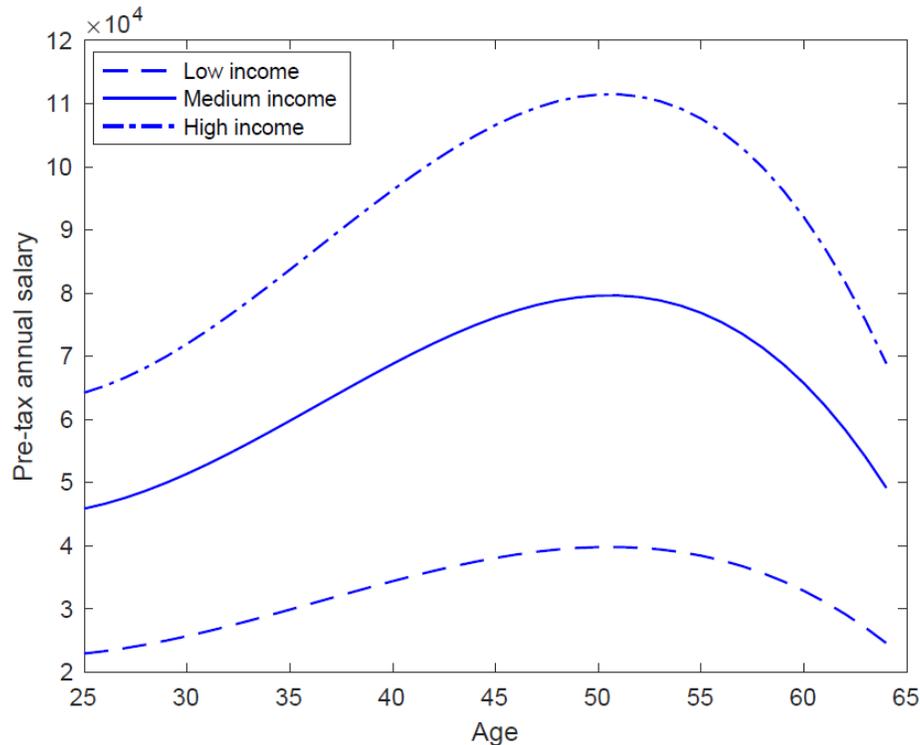
$$Y_{25+t} = 140,600 - 10,128(25 + t) + 329(25 + t)^2 - 3.017(25 + t)^3. \quad (3)$$

Tableau 2 : Salaires, traitements et commissions moyens des hommes canadiens par groupe d'âge en 2017

Groupe d'âge	Salaires, traitements et commissions
-34	51 400
-44	68 800

-54	79 600
-64	65 700

Graphique 3 : Estimation du salaire moyen selon l'âge



*Disponible en anglais seulement.

Nous prenons en compte les personnes ayant trois niveaux de salaire différents à des fins de comparaison :

- Revenu moyen : le profil salarial de la personne est exprimé par l'équation (5) et il est représenté par une ligne continue dans le graphique 3;
- Faible revenu : la personne gagne la moitié du revenu moyen à tous les âges, le salaire correspondant à la ligne pointillée dans le graphique 3;
- Revenu élevé : la personne gagne 40 % de plus que le revenu moyen à tous les âges, le salaire étant représenté par la ligne pointillée avec tirets dans le graphique 3.

Nous comparons également les cas avec et sans accès à une rente de longévité, pour un total de six cas. Pour chaque cas, nous construisons des grilles de variables d'état et nous déterminons les choix optimaux pour tous les points des grilles. Nous simulons ensuite des scénarios de mortalité et de placement, nous calculons les choix optimaux en vertu des scénarios simulés et nous établissons l'utilité à vie de la personne.

Le tableau 3 montre l'utilité simulée moyenne à vie pour les six cas. L'utilité simulée à vie de la

personne ayant un revenu moyen et ayant accès à une rente de longévité est établie en moyenne à $-1,4835e-17$, ce qui est considérablement plus élevé que $-1,7282e-17$, l'utilité à vie de la personne ayant un revenu moyen, mais n'ayant pas accès à une rente de longévité. De même, nous notons un gain d'utilité important pour la personne à revenu élevé lorsque l'accès à une rente de longévité est permis. Toutefois, le gain d'utilité pour la personne à faible revenu est marginal. Par conséquent, la personne à faible revenu ne bénéficie pas de l'accès à une rente de longévité. Nous constatons également que les personnes à revenu moyen et élevé convertissent en moyenne 25 % de l'actif de leurs REER en rente de longévité, qui est la limite supérieure que nous imposons à l'achat d'une rente de longévité. La personne à faible revenu convertit une maigre moyenne de 2 % de l'actif de son REER en rente de longévité, ce qui indique que l'avantage de la rente de longévité est minime et que la demande est peu élevée chez les personnes à faible revenu.

Tableau 3 : Utilité maximale à vie avec et sans accès à une rente de longévité

Niveau de salaire	Faible	Moyen	Élevé
Taux de conversion optimal	1,89 %	24,99 %	25 %
Utilité avec accès ($\times 10^{-18}$)	-195,37	-14,835	-4,829
Utilité sans accès ($\times 10^{-18}$)	-195,85	-17,282	-5,765

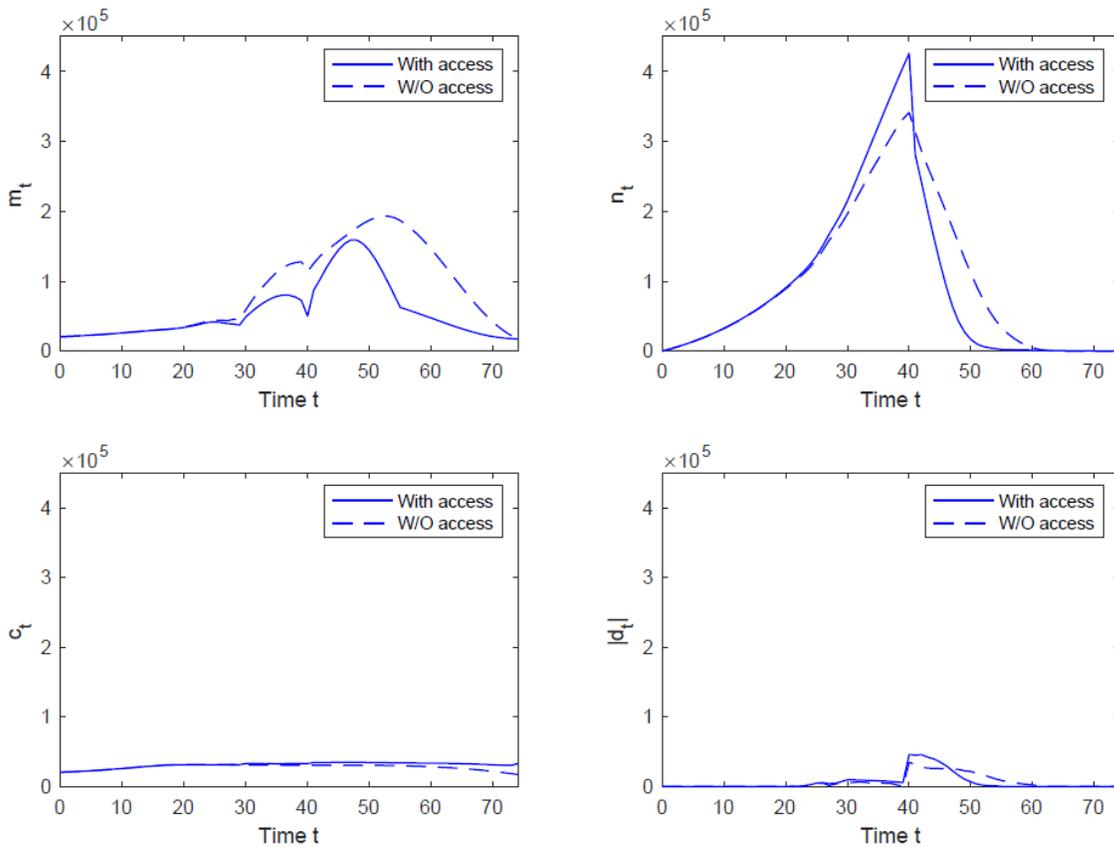
Les personnes à faible revenu n'achètent pas de rente de longévité ou n'en bénéficient pas puisque le paiement d'une telle rente peut réduire sensiblement le montant du SRG. Le revenu annuel maximal donnant droit au SRG est de 17 880 \$ pour un retraité vivant seul. Le total de la rente du RPC et du retrait minimal d'un compte enregistré pour une personne à faible revenu est beaucoup moins élevé que 17 880 \$. Le paiement de la rente de longévité par dollar réduit le montant du SRG d'environ 59 cents jusqu'à ce que ce dernier atteigne zéro. La perte du montant du SRG est supérieure aux prestations de la rente de longévité.

Le graphique 4 montre les valeurs moyennes des variables d'état simulées et les choix optimaux pour la personne ayant un revenu moyen et avec ou sans accès à une rente de longévité. Les lignes pointillées (pleines) correspondent au cas sans (avec) accès à la rente de longévité. Le tableau inférieur droit du graphique 4 affiche la valeur absolue de d_t . Nous constatons que les lignes pointillées et pleines commencent à s'écarter l'une de l'autre à partir de l'instant 23 ou de l'âge 48. Avec accès à la rente de longévité, la personne choisit de verser des cotisations plus élevées à son REER. Par conséquent, sim_n devient plus élevé que sim_n^{wo} après 48 ans. À 65 ans, sim_n descend sous sim_n^{wo} puisqu'une partie du REER est convertie en rente de longévité. Nous observons également des changements dans les lignes pointillées et pleines autour de 55 ans. À 55 ans, l'emprunt hypothécaire est remboursé et des ressources plus liquides sont disponibles pour la consommation et les cotisations à un REER. La personne qui n'a pas accès à la rente de longévité dépose davantage dans son CELI, tandis que celle qui y a accès épargne davantage dans son REER.

Avant la retraite, il n'existe pas de différence évidente dans la consommation dans les deux cas. Après la retraite, nous constatons que la personne qui a accès à une rente de longévité

consomme toujours plus que celle qui n’y a pas accès. La personne qui a accès à une rente de longévité retire davantage de caisses de retraite que celle qui n’y a pas accès entre 65 et 70 ans, mais beaucoup moins après 70 ans. Après 70 ans, elle retire davantage de son compte d’épargne libre d’impôt. À 80 ans, son REER est épuisé et sa consommation aux âges plus avancés est appuyée par une rente de longévité, l’épargne, la rente du RPC, celle de la SV et le SRG.

Graphique 4 : Comparaison des scénarios simulés pour la personne à revenu moyen avec et sans accès à une rente de longévité

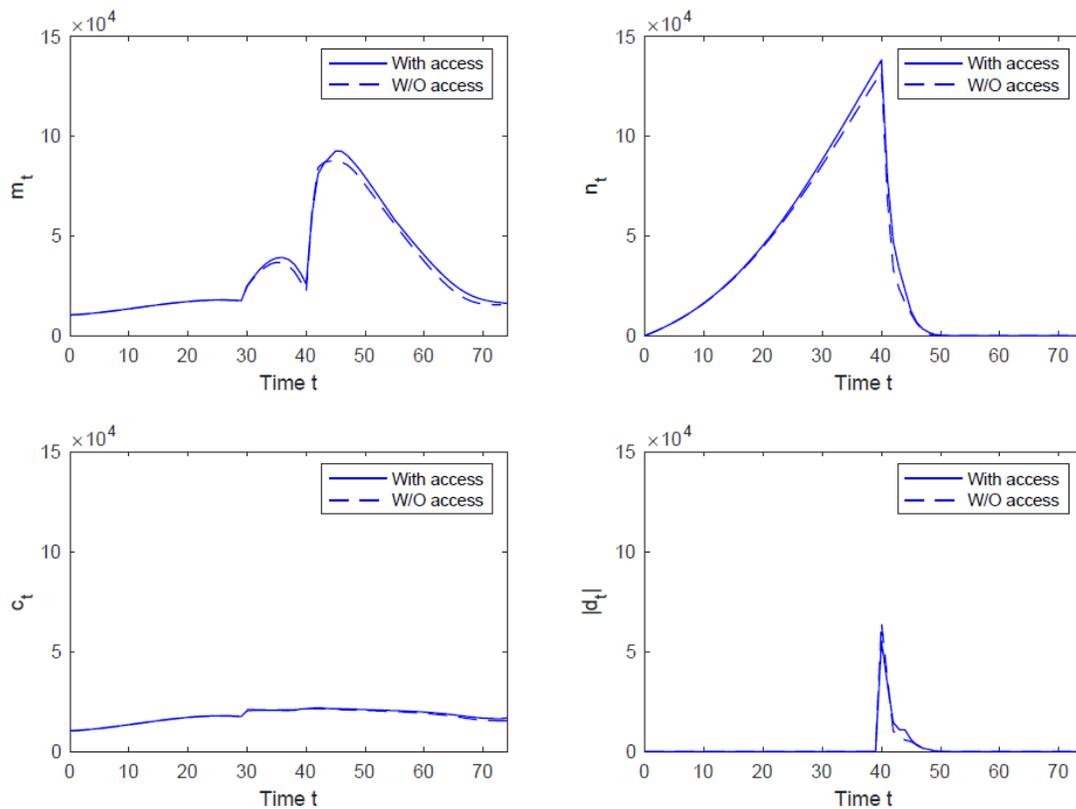


*Disponible en anglais seulement.

Dans le graphique 5, nous illustrons les résultats de la simulation pour la personne à faible revenu avec et sans accès à une rente de longévité. Nous constatons que l’écart attribuable à la provision pour rente de longévité est négligeable, ce qui permet de vérifier notre conclusion selon laquelle la rente de longévité ne profite pas de façon significative aux personnes à faible revenu. Nous observons également que la personne retire un montant important de REER/RPA au cours des premières années de sa retraite. Cela s’explique par le fait que le montant du SRG est réduit d’environ 59 cents par dollar supplémentaire de revenu annuel jusqu’à ce que le montant du SRG atteigne zéro. Le revenu annuel maximal du SRG est de 17 880 \$ pour un retraité vivant seul. Il est préférable pour cette personne de retirer un REER/RPA en gros montants forfaitaires, de sorte qu’il ne perd le SRG que les années où il effectue des retraits

importants. Les personnes à faible revenu ont en moyenne environ 136 600 \$ dans leur REER/RPA à 65 ans. Examinons deux stratégies de retrait. La première stratégie consiste à retirer 17 075 \$ par année pendant huit ans. En supposant que le montant retiré du REER ou du RPA soit le seul revenu à l'exception de la rente de la SV, cette personne recevra 478 \$ de SRG par année pendant ces huit années. La deuxième stratégie consiste à retirer 68 300 \$ par année au cours des deux premières années et, par conséquent, à épuiser le compte REER/RPA dans deux ans. La personne ne reçoit pas de SRG pendant les deux premières années, mais elle touche le plein montant de 10 567 \$ par année pendant les six dernières années. Même si une plus grande part de l'impôt sur le revenu des particuliers doit être payée lorsque d'importants montants forfaitaires de REER/RPA sont retirés au moyen de la deuxième stratégie, les prestations supplémentaires du SRG reçues atténuent l'impact fiscal négatif.

Graphique 5 : Comparaison des scénarios simulés pour la personne à faible revenu avec et sans accès à une rente de longévité



*Disponible en anglais seulement.

L'analyse qui précède montre que le versement d'une rente de longévité accroît sensiblement l'utilité à vie des personnes à revenu moyen et élevé. Pour quantifier l'augmentation en dollars, nous analysons le montant en espèces que doit verser la personne qui n'a pas accès à la rente de longévité à l'âge de 25 ans pour obtenir la même utilité à vie que la personne y ayant accès. La personne à revenu moyen qui n'a pas accès à une rente de longévité doit injecter 11 880 \$ à l'âge de 25 ans pour avoir la même utilité que la personne qui a accès à cette rente. Toutefois, la personne à faible revenu qui n'a pas accès n'a besoin que d'une injection de 33 \$ à l'âge de

25 ans pour avoir la même utilité que la personne qui a accès à cette rente.

Au tableau 4, nous présentons les taux de conversion optimaux à divers niveaux de revenu. Nous constatons que le taux de conversion optimal ne commence à diminuer que lorsqu'une personne gagne un revenu inférieur à 70 % du revenu moyen.

Tableau 4 : Taux de conversion optimal pour les personnes à différents niveaux de revenu, en supposant un chargement de primes nul

Revenu (% du revenu moyen)	50	55	60	70	80	90	100
Taux de conversion optimal	0 %	19,50 %	21,07 %	24,24 %	24,86 %	24,97 %	25,00 %

7.2 Tests de sensibilité

7.2.1 Nombres de points de la grille dans la MGEG

Les nombres de points de la grille pour m_t , n_t , κ_t , L , a_t et b_t utilisés dans les grilles régulières exogènes sont $n_m = 20$, $n_n = 20$, $n_\kappa = 10$, $n_L = 10$, $n_a = 40$, et $n_b = 40$ respectivement. Au tableau 5, nous examinons la variation du taux de conversion optimal et de l'utilité à vie à l'aide du nombre de points de la grille. Bien que l'augmentation ou la diminution du nombre de points de la grille n'ait aucune incidence sur le taux de conversion optimal moyen simulé, l'utilité optimisée à vie varie quelque peu.

Tableau 5 : Taux de conversion optimaux et utilité à vie pour une personne à revenu moyen utilisant des grilles de tailles différentes dans la MGEG

$(n_m, n_n, n_\kappa, n_L, n_a, n_b)$	Utilité ($\times 10^{-18}$)	Taux de conversion optimal
(20,20,20,20,40,40)	-14,835	25,00 %
(30,30,10,10,90,90)	-14,894	25,00 %
(10,10,10,10,10,10)	-15,352	25,00 %

7.2.2 Chargement de prime

Nous nous attendons à ce que la demande ou le taux de conversion optimal diminue en parallèle avec le prix de la rente de longévité. Dans le tableau 6, nous examinons quatre niveaux de chargement pour une personne à revenu moyen. Lorsque la charge de 20 % est appliquée, la rente de longévité avec paiement régulier de 1 \$ se vend $(1.2_{15} | \ddot{a}_{65,41})$ \$ et le taux de conversion optimal demeure à 25 %. En raison de la limite de 25 % imposée au taux de conversion, la personne achète toujours le montant maximal permis dans le cas d'un

chargement de 0 % à 25 %. Lorsque le chargement est porté à 50 % et 100 %, nous constatons une diminution du taux de conversion. Étant donné que les chargements réels sont habituellement inférieurs à 20 %, nous devrions nous attendre à ce que la personne à revenu moyen convertisse 25 % de son REER/RPA en rente de longévité.

Tableau 6 : Taux de conversion optimal pour les personnes à revenu moyen selon différents niveaux de chargement des primes de rente de longévité

Chargement de prime	0 %	20 %	50 %	100 %
Taux de conversion optimal	25,00 %	24,99 %	24,75 %	13,95 %

7.2.3 Limite de conversion

Dans l'analyse ci-dessus, nous avons fixé le taux de conversion maximal à 25 %. Pour les personnes à revenu moyen et élevé, le taux de conversion optimal atteint la limite de 25 % dans la plupart des scénarios simulés. Dans le tableau 7, nous augmentons la limite de conversion à 35 %, 50 % et 75 %. Nous constatons que le taux de conversion optimal augmente en fonction de la limite de conversion. Lorsque la limite est fixée à 35 %, le taux de conversion optimal simulé moyen est de 34,95 %, ce qui indique qu'en majorité, les taux de conversion optimaux simulés atteignent la limite supérieure. Lorsque la limite de conversion passe de 50 % à 75 %, la variation du taux de conversion est marginale, ce qui indique que la plupart des taux de conversion optimaux simulés sont inférieurs à 50 %.

Tableau 7 : Taux de conversion optimaux en vertu de limites de conversion différentes pour une personne à revenu moyen

Limite de conversion	25 %	35 %	50 %	75 %
Taux de conversion optimal	25,00 %	34,95 %	39,25 %	39,27 %

7.2.4 Niveau de mortalité

Le coût de la rente de longévité est établi selon l'hypothèse de la courbe de mortalité de la population. Toutefois, les personnes disposent de plus de renseignements sur leur propre santé. Elles tiennent donc compte de leur mortalité future perçue pour prendre des décisions. Nous réexaminons le modèle du cycle de vie en utilisant la mortalité perçue chez les 65 à 99 ans. Le taux de mortalité perçu à l'âge x dans l'année t , désigné par $\hat{m}_{x,t}$, est présumé constituer un multiple de $m_{x,t}$ et il est exprimé comme suit :

$$\begin{aligned}
 \hat{m}_{x,t} &= \psi \cdot m_{x,t} \\
 &= \psi \cdot e^{\beta_x^{(0)} + \beta_x^{(1)} \kappa_t} \\
 &= \psi \cdot e^{\ln c + \beta_x^{(0)} + \beta_x^{(1)} \kappa_t} \\
 &= \psi \cdot e^{\hat{\beta}_x^{(0)} + \beta_x^{(1)} \kappa_t},
 \end{aligned}$$

où $\hat{\beta}_x^{(0)} = \ln c + \beta_x^{(0)}$. La configuration du modèle de cycle de vie demeure la même, sauf que nous remplaçons $\beta_x^{(0)}$ par $\hat{\beta}_x^{(0)}$.

Dans le tableau 8, nous présentons les taux de conversion optimaux à l'aide de la mortalité perçue. Selon les trois scénarios de mortalité perçue et une limite de conversion de 25 %, le taux de conversion simulé moyen est toujours de 25 % pour les personnes à revenu moyen. Lorsque la limite de conversion est portée à 50 %, nous constatons que les personnes présentant une mortalité perçue moins élevée achètent sensiblement plus de rentes de longévité.

Tableau 8 : Taux de conversion optimaux établis à l'aide de la mortalité perçue pour les 65 à 99 ans

ψ		0,5	1	1,5
Taux de conversion optimal	Limite de 25 %	25,00 %	25,00 %	25,00 %
	Limite de 50 %	44,19 %	39,25 %	35,05 %

7.2.5 Paramètre d'aversion pour le risque

Au tableau 9, nous présentons les taux de conversion optimaux à l'aide de paramètres d'aversion différents pour le risque. Lorsque la limite de conversion est fixée à 25 %, l'aversion relative pour le risque ne change pas dans le taux de conversion optimal simulé moyen pour les personnes à revenu moyen. Lorsque la limite de conversion est portée à 50 %, nous constatons que les personnes à revenu moyen achètent davantage de rentes de longévité.

Tableau 9 : Taux de conversion optimaux pour diverses hypothèses d'aversion relative pour le risque des personnes à revenu moyen

γ		3	5	7
Taux de conversion optimal	(limite de 25 %)	25,00 %	25,00 %	25 %
	(limite de 50 %)	43,71 %	39,25 %	36,95 %

8 Résultats fondés sur les données de mortalité du RPC

8.1 Données de mortalité du RPC

Nous obtenons les données de mortalité du RPC par groupe de régimes de retraite du Bureau du surintendant des institutions financières Canada. Les données de mortalité comprennent le nombre d'expositions et de décès pour les hommes et les femmes de 60 à 120 ans entre 1967 et 2015. Les groupes de rentes utilisés pour séparer les données sont les suivants : [1 -]

1. 0 % à 9 % de la rente maximale;
2. 10 % à 19 % de la rente maximale;
3. 20 % à 29 % de la rente maximale;
4. 30 % à 39 % de la rente maximale;
5. 40 % à 49 % de la rente maximale;
6. 50 % à 59 % de la rente maximale;
7. 60 % à 69 % de la rente maximale;
8. 70 % à 79 % de la rente maximale;
9. 80 % à 89 % de la rente maximale;
10. 90 % à 99 % de la rente maximale;
11. 100 % ou plus de la rente maximale⁷.

8.2 Modèle et estimation

À la section 6, nous examinons les personnes ayant différents niveaux de revenu avant la retraite. La rente du RPC reçue par la personne à faible revenu avant la retraite représente environ 59 % de la rente maximale du RPC. Par conséquent, cette personne appartient au groupe de rente 6. La rente du RPC reçue par la personne à revenu moyen correspond à environ 98 % de la rente maximale, ce qui correspond au groupe de rente 10. La rente du RPC reçue par la personne à revenu élevé est la rente maximale. Elle est donc classée dans le groupe 11. Ci-après, nous modélisons la mortalité des retraités dans les groupes de rentes 6, 10 et 11.

Nous considérons le modèle augmenté des facteurs communs (AFC) proposé par Li et Lee (2005). Ce modèle est structuré comme suit :

$$\ln(m_{x,t}^{(g)}) = a_x^{(g)} + B_x K_t + b_x^{(g)} k_t^{(g)},$$

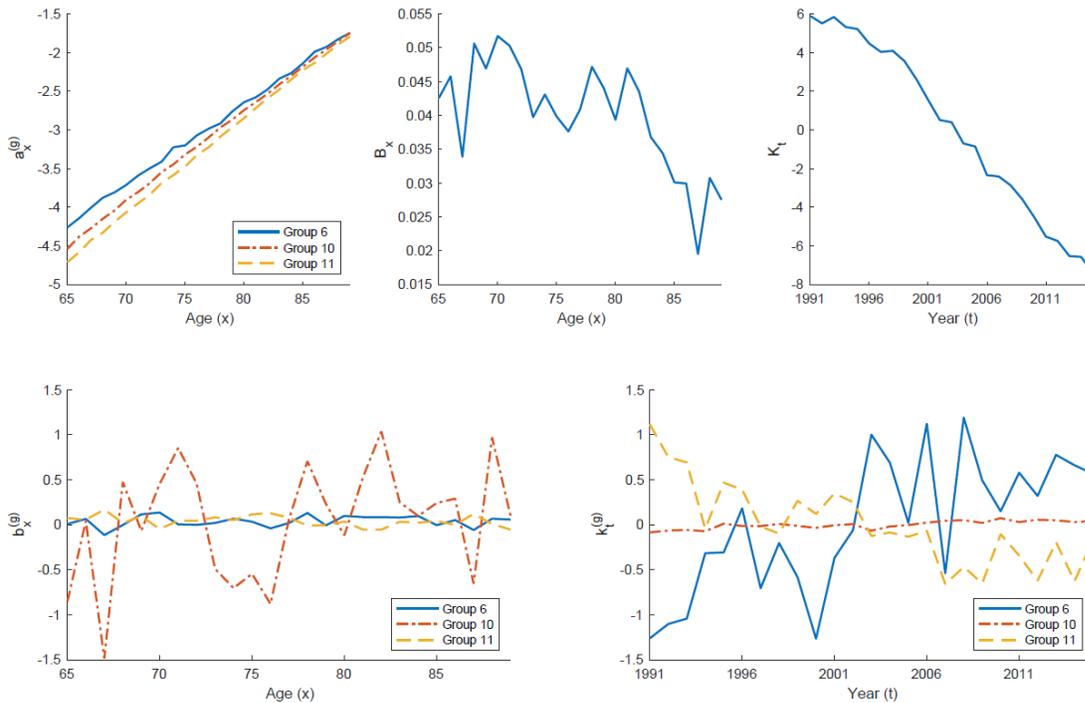
où $m_{x,t}^{(g)}$ est le taux de décès central g' du groupe de rentes à x ans et à l'année t , $a_x^{(g)}$ est le paramètre propre à l'âge qui indique le taux de mortalité moyen à l'âge x du groupe de rentes g , K_t est l'indice variant dans le temps qui influe sur tous les groupes de rentes à modéliser, $k_t^{(g)}$ est l'indice variant dans le temps propre au groupe de rentes g , et B_x et

⁷ Deux options permettent à un retraité de toucher plus de 100 % de la rente maximale : (1) Convertir les prestations d'invalidité existantes en prestations du RPC à la retraite et (2) convertir une rente existante de survivant en prestations du RPC à la retraite.

$b_x^{(g)}$ respectivement représentent les paramètres propres à l'âge qui reflètent la sensibilité de $\ln(m_{x,t}^{(g)})$ à K_t et à $k_t^{(g)}$.

Une estimation du modèle AFC est établie au moyen de la méthode d'EMV. Le graphique 6 montre les estimations de $a_x^{(g)}$, B_x , K_t , $b_x^{(g)}$ et $k_t^{(g)}$ ajustées aux données sur les hommes du RPC dans les groupes de rentes 6, 10 et 11 en utilisant la période d'échantillon 1991 à 2015 et la fourchette d'âge 65 à 89 ans.

Graphique 6 : Estimations de $a_x^{(g)}$, B_x , K_t , $b_x^{(g)}$ et $k_t^{(g)}$ ajustées aux données sur les hommes du RPC



*Disponible en anglais seulement.

8.3 Prédiction

D'après Li et Lee (2005), nous supposons une marche aléatoire avec dérive pour K_t :

$$K_t = \mu + K_{t-1} + \sigma\omega_t,$$

où μ est le terme de dérive et $\{\omega_t\}$ est une suite de variables aléatoires normales standard indépendantes et identiquement distribuées. Pour chaque $k_t^{(g)}$, nous supposons un processus autorégressif de premier ordre :

$$k_t^{(g)} = \phi_0^{(g)} + \phi_1^{(g)}k_{t-1}^{(g)} + \sigma^{(g)}\zeta_t^{(g)},$$

où $\phi_0^{(g)}$, $\phi_1^{(g)}$ et $\sigma^{(g)}$ sont des constantes et $\{\zeta_t^{(g)}\}$ est une suite de variables aléatoires normales standard indépendantes et identiquement distribuées. Nous supposons en outre que $\zeta_t^{(g)}$ et ω_t sont indépendants les uns des autres et que $\zeta_t^{(i)}$ et $\zeta_t^{(j)}$ pour $i \neq j$ sont

également indépendants. Le tableau 6 présente les estimations de $\phi_0^{(g)}$, $\phi_1^{(g)}$, σ , μ et de $\sigma^{(g)}$. Le graphique 7 montre les intervalles de prédiction de K_t , $k_t^{(6)}$, $k_t^{(10)}$, $k_t^{(11)}$ pour $t = 2016, \dots, 2040$.

Tableau 6 : Estimations de $\phi_0^{(g)}$, $\phi_1^{(g)}$, $\sigma^{(g)}$, μ et σ ajustés aux données sur les hommes du RPC

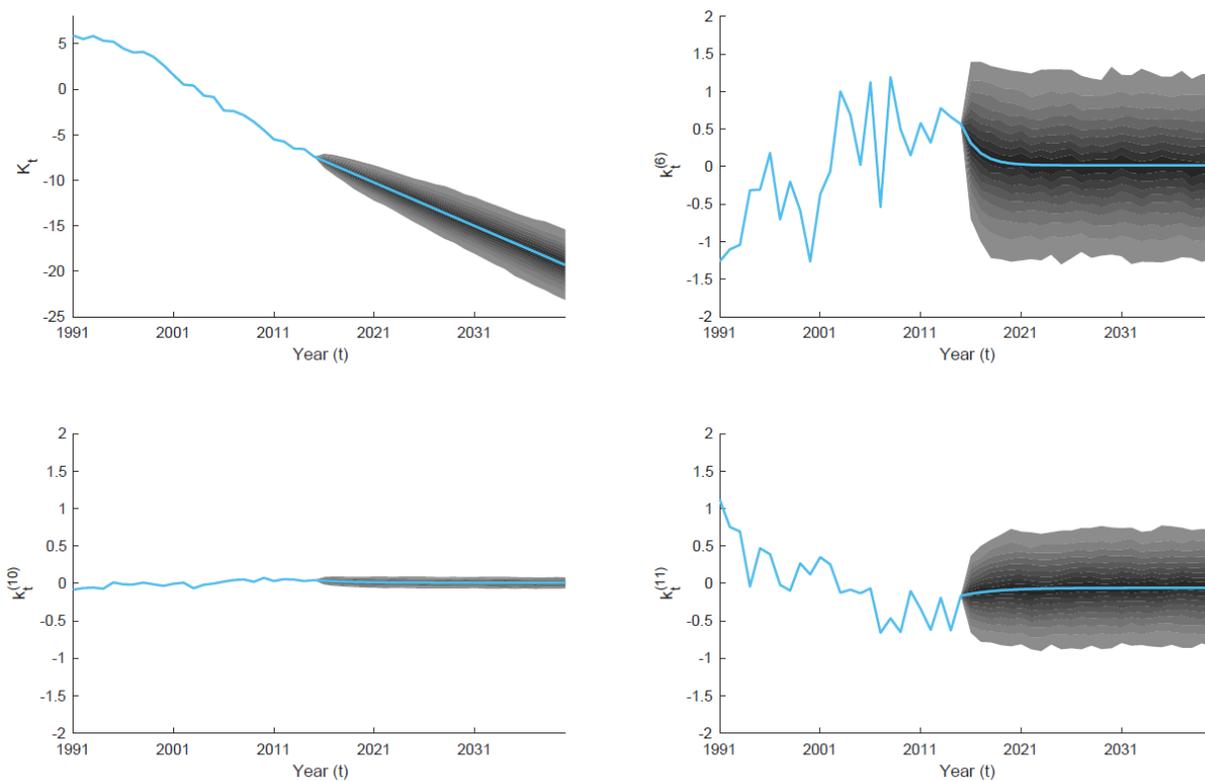
Groupe de retraités	6	10	11
$\phi_0^{(g)}$	0,0073	0,0019	-0,0148
$\phi_1^{(g)}$	0,5408	0,7553	0,7554
$\sigma^{(g)}$	0,4003	0,0009	0,0974
μ	-0,4755		
σ	0,2306		

Soit $q_{x,t}^{(g)} = 1 - \exp(-m_{x,t}^{(g)})$ la probabilité qu'une personne du groupe des rentes g qui atteint l'âge de x au début de l'année t décède dans l'année t . La probabilité de survie de T ans pour cette personne peut être formulée ainsi :

$${}_T S_{x,t}^{(g)} = \prod_{j=0}^{T-1} (1 - q_{x+j,t+j}^{(g)}).$$

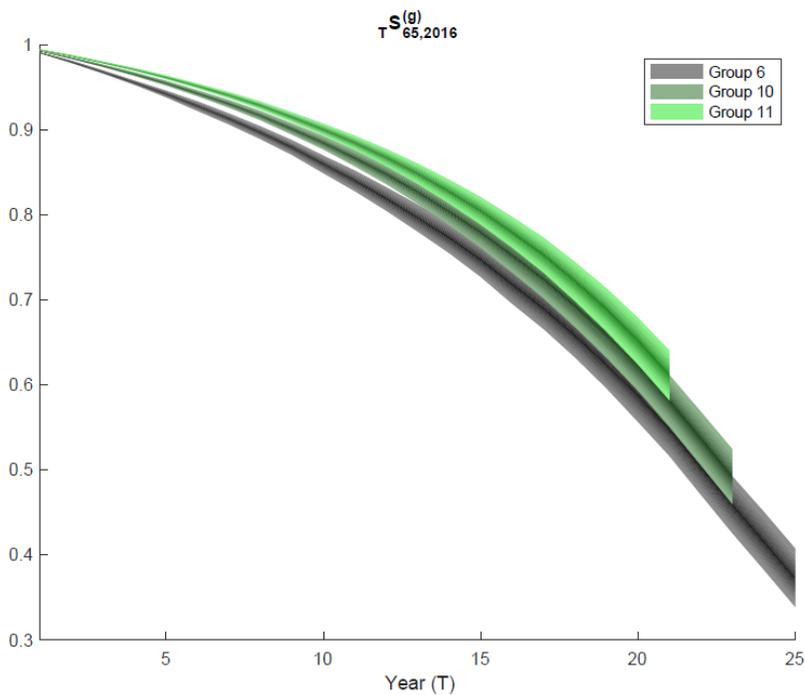
Le graphique 8 montre les intervalles de prévision de ${}_T S_{65,2016}^{(6)}$, ${}_T S_{65,2016}^{(10)}$, ${}_T S_{65,2016}^{(11)}$ pour $T = 1, \dots, 25$.

Graphique 7 : Intervalles de prévision K_t , $k_t^{(6)}$, $k_t^{(10)}$, $k_t^{(11)}$.



*Disponible en anglais seulement.

Graphique 8 : Intervalles de prévision $T S_{65,2016}^{(6)}$, $T S_{65,2016}^{(10)}$, $T S_{65,2016}^{(11)}$ pour $T = 1, \dots, 25$.



8.4 Intégration de l'effet de la catégorie de revenu sur la mortalité

À la section 7, nous analysons le gain d'utilité rattaché à l'accès aux rentes de longévité pour les personnes ayant des niveaux de revenu différents avant la retraite, mais la même expérience de mortalité. Toutefois, l'étude des données de mortalité du RPC indique que la mortalité plus faible est associée à des niveaux de revenu plus élevés. Par conséquent, il est nécessaire d'intégrer l'effet du niveau de revenu sur la mortalité dans le modèle du cycle de vie.

Puisque le modèle à plusieurs populations décrit à la section précédente comprend deux indices variant dans le temps, un indice commun pour tous les groupes de rentes et un indice individuel pour un groupe de rentes particulier, les deux indices doivent être traités comme des variables d'état dans le modèle du cycle de vie. Pour minimiser le changement dans la formulation du modèle, nous redéfinissons κ_t dans le modèle du cycle de vie par $\kappa_t = [K_t, k_t^{(g)}]$. Le problème d'optimisation ne change pas, sauf que les contraintes pour κ_t sont remplacées par ce qui suit :

$$\begin{aligned}\kappa_t &= [K_t, k_t^{(g)}], \\ K_t &= \mu + K_{t-1} + \sigma\omega_t, \\ k_t^{(g)} &= \phi_0^{(g)} + \phi_1^{(g)}k_{t-1}^{(g)} + \sigma^{(g)}\zeta_t^{(g)}.\end{aligned}$$

Les données de mortalité du RPC oscillent entre 60 et 120 ans. Comme il n'y a pas de données disponibles pour les âges plus jeunes, nous amorçons l'analyse à partir de l'âge de la retraite, soit 65 ans. Supposons qu'une personne atteigne l'âge de 65 ans au début de 2018. Désignons l'actif liquide et le REER de cette personne au début de 2018 par m_0 et n_0 respectivement. Pour chaque niveau de revenu, nous avons établi m_0 et n_0 à l'actif liquide simulé moyen et au REER d'une personne ayant le même niveau de revenu et n'ayant pas accès à une rente de longévité à 65 ans à partir de la section 7. Nous évaluons l'utilité à vie de la personne (de 65 à 100 ans) selon cinq scénarios :

1. Faible revenu et taux de mortalité du groupe 6;
2. Faible revenu et taux de mortalité du groupe 10;
3. Revenu moyen et taux de mortalité du groupe 10;
4. Revenu élevé et taux de mortalité du groupe 10;
5. Revenu élevé et taux de mortalité du groupe 11.

Puisque la mortalité du groupe 10 est proche de la mortalité moyenne de tous les groupes, nous pouvons considérer les scénarios 2 à 4 comme les cas qui ne tiennent pas compte de l'écart de mortalité entre les différents niveaux de revenu. Les comparaisons entre les scénarios 1 et 2 et entre les scénarios 4 et 5 montrent comment l'intégration de la relation entre la mortalité et le niveau de revenu influe sur nos résultats.

Les résultats des cinq scénarios sont présentés au tableau 7. La personne à faible revenu s'en tire mieux sans l'achat de rentes de longévité dans les deux scénarios 1 et 2, tandis qu'elle présente une utilité légèrement inférieure dans le scénario 2 que dans le scénario 1. À la section précédente, nous avons constaté que la mortalité au sein du groupe 10 est plus faible

que celle du groupe 6. Par conséquent, la personne vit plus longtemps et le prix de la rente de longévité est plus élevé dans le scénario 2 que dans le scénario 1. Puisque la personne à faible revenu n'achète pas de rente de longévité, la diminution de l'utilité dans le scénario 2 est attribuable au fait qu'elle doit vivre avec le même montant de patrimoine initial pendant une période plus longue. Dans le scénario 3, la personne à revenu moyen continue d'acheter le montant maximal de rente de longévité en vertu de la mortalité propre à son groupe. L'accès à une rente de longévité améliore considérablement son utilité. Dans les scénarios 4 et 5, la personne à revenu élevé achète également le montant maximal de rente de longévité. Lorsque la personne à revenu élevé est présumée enregistrer la mortalité du groupe 10 (scénario 4) au lieu de la mortalité du groupe 11 (scénario 5), elle paie le prix moindre de la rente de longévité et son espérance de vie prévue est plus courte. Par conséquent, une plus grande utilité à vie peut être obtenue dans le scénario 4.

D'après les scénarios examinés ci-dessus, le fait d'ignorer l'écart de mortalité entre les niveaux de revenu entraîne une sous-estimation de l'utilité pour les personnes à faible revenu et une surestimation pour les personnes à revenu élevé. L'intégration de l'écart de mortalité entre les niveaux de revenu ne semble pas influencer sur le pourcentage converti en rente de longévité. Cette observation peut être attribuable à la classification grossière des niveaux de revenu utilisée dans la comparaison.

Tableau 7 : Incidence de l'accès à la rente de longévité pour les retraités de différents groupes de rentes

Scénarios	1	2	3	4	5
Revenu	Faible		Moyen	Élevé	
Groupe de retraités	6		10	11	
m_0	24 819		118 040	172 599	
n_0	137 100		345 570	628 516	
Groupe de mortalité	6	10	10	10	11
Taux de conversion	0	0	25 %	25 %	25 %
Utilité avec accès ($\times 10^{-18}$)	-24,752	-27,116	-3,291	-0,892	-1,000
Utilité sans accès ($\times 10^{-18}$)	-24,752	-27,116	-6,043	-2,085	-2,196

9 Conclusion

Dans le présent rapport, nous examinons les avantages de l'accès à la rente de longévité pour les Canadiens ayant différents niveaux de revenu. Nous élaborons un modèle de cycle de vie pour déterminer la consommation optimale, la cotisation ou le retrait d'un régime de retraite et la conversion à une rente de longévité. Notre modèle de cycle de vie, qui repose sur un système de revenu de retraite et des règles fiscales réalistes au Canada, intègre également des taux de mortalité stochastiques et le rendement des placements. Pour optimiser l'utilité à vie, nous proposons une MGEF modifiée qui peut traiter le problème non différentiable causé par des règles fiscales et un système de revenu de retraite canadien réalistes.

En supposant la même expérience de mortalité, nous constatons que les personnes à revenu moyen et élevé bénéficient grandement de l'accès à une rente de longévité, tandis que les personnes à faible revenu n'en bénéficient que de façon marginale. La rente de longévité procure un important report d'impôt aux personnes riches qui ont un revenu de retraite suffisant provenant d'autres sources puisque les paiements de rente commencent à des âges avancés et que l'achat de rentes viagères réduit le retrait minimal des comptes enregistrés requis à compter de 71 ans. Les personnes à faible revenu ne profitent pas autant, car elles ont un revenu de retraite insuffisant provenant d'autres sources et qu'il est préférable qu'elles retirent un montant supérieur à l'exigence minimale des comptes enregistrés.

Nous examinons également l'incidence de la classe de revenu sur l'expérience de mortalité à l'aide des données de mortalité du RPC. Nous constatons que les personnes qui reçoivent une rente plus élevée du RPC affichent généralement un taux de mortalité plus faible. En tenant compte des mortalités propres au groupe, l'achat optimal de rentes de longévité ne change pas pour les trois groupes de rentes du RPC pris en considération. Toutefois, nous observons de petits changements dans l'utilité maximale réalisable. L'utilité pour les personnes à revenu élevé diminue avec le recours aux mortalités propres à un groupe, étant donné qu'un prix plus élevé est payé pour une rente de longévité et que les personnes vivent avec le même montant de richesse pendant une plus longue durée de vie prévue. L'utilité pour les personnes à faible revenu augmente avec l'utilisation de mortalités propres à un groupe, puisque les personnes vivent avec le même montant de richesse pendant une plus courte durée de vie prévue.

Les personnes à faible revenu n'achètent pas de rente de longévité puisque le paiement d'une telle rente peut réduire sensiblement le montant du SRG. Pour que la rente de longévité soit avantageuse pour les personnes à faible revenu, nous pourrions envisager de modifier la règle de calcul du montant du SRG ou le mode de paiement de la rente de longévité. Certaines variations de la rente de longévité ont été proposées, y compris la rente différée variable liée aux placements (Maurer et coll., 2013) et la rente viagère en cas de ruine (Huang et coll., 2009, 2014). Dans les travaux de recherche futurs, l'expérimentation de diverses règles de calcul du SRG et des variations de la rente de longévité sera justifiée dans le but d'accroître les prestations pour les personnes à faible revenu.

Dans la présente étude, l'âge de la retraite est fixé à 65 ans. Les recherches futures pourraient examiner les divers âges de la retraite et la façon dont l'achat de rentes de longévité évolue selon l'âge de la retraite. Nous pourrions également inclure l'âge de la retraite comme variable de décision et étudier l'incidence de l'accès aux rentes de longévité sur le choix de l'âge de la retraite.

Remerciements

La présente recherche a été financée par l'Institut canadien des actuaires dans le cadre du Programme de bourses de recherche universitaire.

Annexe A – Calcul du paiement de la rente du RPC

Dénotons le maximum des gains annuels ouvrant droit à pension de l'année t par $YMPE_t$. Nous montrons un exemple de calcul du montant de la rente du RPC pour une personne qui commence à toucher une rente du RPC lorsqu'elle atteindra 65 ans le 1^{er} janvier 2018. Nous supposons que la période d'exclusion générale maximale est appliquée à cette personne. Soit \mathbb{A} comme la liste des années de cotisation qui ne sont pas visées par l'exclusion générale. Les mesures qui suivent sont prises pour calculer le montant de la pension du RPC : [(i)]

1. Calculer le nombre de mois de cotisation de base. La période de cotisation de base est de 47 ans, soit de 18 à 65 ans. En permettant d'exclure 17 % de la période de cotisation de base (huit ans) comportant les gains les plus faibles, le nombre de mois de cotisation de base est de $NCM = (65 - 18 - 8) \times 12 = 468$.
2. Calculer les gains non ajustés ouvrant droit à pension pour l'année t , UPE_t , pour $t \in \mathbb{A}$:

$$UPE_t = \min(Y_t, YMPE_t)$$

3. Calculer les gains ouvrant droit à pension ajustés pour l'année t , APE_t , pour $t \in \mathbb{A}$:

$$APE_t = \frac{UPE_t}{YMPE_t} \times \frac{\sum_{t=2014}^{2018} YMPE_t}{5}$$

4. Calculer le total des gains ajustés ouvrant droit à pension (TGAP)

$$TAPE = \sum_{t \in \mathbb{A}} APE_t$$

5. Calculer la rente de retraite mensuelle du RPC en 2018

$$0.25 \times \frac{TAPE}{NCM}$$

Puisque le montant de la rente du RPC est indexé selon l'IPC, la rente de retraite mensuelle du RPC au cours d'une année future t pour $t > 2018$ est de $0.25 \times \frac{TAPE}{NCM} \times \frac{CPI_t}{CPI_{2018}}$.

Annexe B – Méthode de la grille endogène

Carroll (2006) propose la MGE, qui évite la recherche itérative dans l'IFV et qui nécessite donc beaucoup moins de temps de calcul. Le principe fondamental de la MGE consiste à spécifier une grille exogène par rapport à l'état postérieur à la décision plutôt qu'à l'état préalable à la décision. Rappelez-vous que la fonction $V_t(m_t, n_t, \kappa_{t-1})$ de valeur $V_t(m_t, n_t, \kappa_{t-1})$ pour $t \leq 40$ est une fonction de l'état préalable à la décision (m_t, n_t, κ_{t-1}) . Pour illustrer le principe de la MGE, nous reformulons la fonction de valeur d'après les variables d'état postérieur à la décision, (a_t, b_t, κ_{t-1}) comme suit :

$$\begin{aligned}
 & V_t(m_t, n_t, \kappa_{t-1}) \\
 &= \max_{c_t, d_t} u(c_t) + \beta \mathbb{E}[p_{25+t-1,t} V_{t+1}(m_{t+1}, n_{t+1}, \kappa_t) | m_t, n_t, \kappa_{t-1}] \\
 &= \max_{c_t, d_t} u(c_t) + \beta \mathbb{E}[f(\kappa_t) V_{t+1}(m_{t+1}, n_{t+1}, \kappa_t) | m_t, n_t, \kappa_{t-1}], \\
 &= \max_{c_t, d_t} u(c_t) \\
 &+ \beta \mathbb{E}[f(\kappa_{t-1} + \Delta\kappa_t) V_{t+1}(e^{R_t} a_t + y_{t+1}, e^{R_t} b_t + 0.05 Y_{t+1}, \kappa_{t-1} + \\
 &\Delta\kappa_t) | a_t, b_t, \kappa_{t-1}],
 \end{aligned}$$

où $\Delta\kappa_t = \mu + \sigma z_t$ et $f(\kappa_t) = p_{25+t-1,t} = e^{-m_{25+t-1,t}} = e^{-e^{\beta_{25+t-1}^{(0)} + \beta_{25+t-1}^{(1)} \kappa_t}}$. Dans la dernière égalité, nous remplaçons les variables conditionnées des variables d'état préalable à la décision (m_t, n_t, κ_{t-1}) par des variables d'état postérieur à la décision (a_t, b_t, κ_{t-1}) puisque (a_t, b_t) sont des fonctions déterministes de (m_t, n_t) compte tenu des choix (c_t, d_t) .

Puisque R_t et $\Delta\kappa_t$ sont des variables aléatoires indépendantes des variables d'état postérieur à la décision et que y_{t+1} et Y_{t+1} sont des valeurs connues, la valeur de continuation est une fonction des variables d'état postérieur à la décision. Soit la fonction de valeur de continuation par $w_t(a_t, b_t, \kappa_{t-1})$, où

$$w_t(a_t, b_t, \kappa_{t-1}) = \mathbb{E}[f(\kappa_{t-1} + \Delta\kappa_t) V_{t+1}(R_{t+1}^a a_t + y_{t+1}, b_t R_{t+1}^b, \kappa_{t-1} + \Delta\kappa_t) | a_t, b_t, \kappa_{t-1}],$$

la fonction de valeur peut être reformulée comme suit :

$$\tilde{V}_t(a_t, b_t, \kappa_{t-1}) = \max_{c_t, d_t} u(c_t) + \beta w_t(a_t, b_t, \kappa_{t-1}). \quad (4)$$

Il convient de noter que a_t et b_t sont des fonctions de c_t et d_t en raison des contraintes budgétaires. Supposons que la fonction de valeur de continuation est différentiable en ce qui concerne c_t et d_t et que les contraintes de choix ne sont pas exécutoires. En utilisant les CPO, les choix optimaux satisfont aux équations suivantes :

$$c_t^* = [\beta w_{t,a}(a_t, b_t, \kappa_t)]^{-\frac{1}{\gamma}}, \quad (5)$$

$$d_t^* = g_d^{-1} \left(\frac{w_{t,a}(a_t, b_t, \kappa_t) - w_{t,b}(a_t, b_t, \kappa_t)}{w_{t,a}(a_t, b_t, \kappa_t)} \right), \quad (6)$$

où

$$w_{t,a}(a_t, b_t, k_t) = \frac{\partial w_t(a_t, b_t, k_t)}{\partial a_t},$$

$$w_{t,b}(a_t, b_t, k_t) = \frac{\partial w_t(a_t, b_t, k_t)}{\partial b_t},$$

$$g_d(d_t) = \frac{\partial g(d_t)}{\partial d_t},$$

et $g_d^{-1}(\cdot)$ est la fonction inverse de $g_d(\cdot)$. Une preuve des équations (5) et (6) est fournie à l'annexe D. En supposant que la fonction objective est concave et que l'ensemble de choix est convexe, les CPO sont des conditions suffisantes pour un maximum global et c_t^* et d_t^* doivent être les choix optimaux uniques. En utilisant la MGE, nous construisons d'abord une grille exogène pour l'état postérieur à la décision (a_t, b_t, κ_{t-1}) . Pour chaque point de cette grille, nous évaluons la fonction de la valeur de continuation et ses dérivés, puis nous déterminons les choix optimaux c_t^* et d_t^* à l'aide des équations (5) et (6). Enfin, nous utilisons la contrainte budgétaire pour écarter les valeurs des variables d'état préalable à la décision qui correspondent aux choix optimaux et aux variables d'état postérieur à la décision, comme suit :

$$m_t^* = a_t + c_t^* + d_t^* - g(d_t^*),$$

$$n_t^* = b_t - d_t^*.$$

Puisque les variables d'état préalable à la décision sont déterminées de façon endogène, la grille construite à partir de leurs valeurs est appelée grille endogène. L'avantage de la MGE porte sur le fait que les choix optimaux sont trouvés sans optimisation numérique, un processus itératif et long. La valeur de continuation, qui représente l'espérance par rapport aux variables de la période suivante, n'est utilisée qu'une fois pour chaque point exogène de la grille. Par contre, l'optimisation numérique utilisée dans l'IFV nécessite des procédures itératives qui calculent l'espérance dans chaque itération.

Annexe C – Évaluation de la fonction de valeur par segments

C.1 Construction de grilles exogènes

Pour l'année t , nous construisons d'abord une grille exogène régulière commune $\mathcal{G}_t^{m,n,\kappa}$ par rapport aux états préalables à la décision m_t , n_t , et κ_{t-1} . L'objectif de l'algorithme consiste à évaluer $V_t(m_t, n_t, \kappa_{t-1})$ pour chaque point de la grille exogène $\mathcal{G}_t^{m,n,\kappa}$. L'algorithme est exécuté à rebours à partir de 99 ans, 98 ans, 97 ans, ..., jusqu'à 25 ans. Par conséquent, la fonction de valeur pour l'année $t + 1$ $V_{t+1}(m_{t+1}, n_{t+1}, \kappa_t)$, doit être évaluée pour les points de la grille $\mathcal{G}_{t+1}^{m,n,\kappa}$.

Nous construisons une autre grille régulière commune $\mathcal{G}_t^{a,b,\kappa}$ par rapport aux états postérieurs à la décision a_t , b_t , et κ_{t-1} et nous calculons $w_t(a_t, b_t, \kappa_{t-1})$ et ses dérivés $w_{t,a}(a_t, b_t, \kappa_{t-1})$ et $w_{t,b}(a_t, b_t, \kappa_{t-1})$ sur cette grille en recourant à l'intégration numérique et à l'interpolation.

C.2 Évaluation de la fonction de valeur

Pour chaque segment, nous déterminons les valeurs de $V_t(m_t, n_t, \kappa_{t-1})$ pour tous les points de la grille $\mathcal{G}_t^{m,n,\kappa}$.

Cas 1. Segments avec c_t et d_t limités : $a_t = 0$ et $d_t = \hat{d} \in \{0, Y_t - h_j, Y_t - h_{j-1}, \dots, Y_t - h_{\hat{n}+1}, Y_t - h_{\hat{n}}\}$

Puisque les deux options sont limitées, il n'est pas nécessaire d'utiliser la MGE et nous pouvons travailler directement avec la grille régulière $\mathcal{G}_t^{m,n,\kappa}$. Étant donné un point $(\hat{m}_t, \hat{n}_t, \hat{\kappa}_{t-1})$ sur la grille exogène $\mathcal{G}_t^{m,n,\kappa}$, nous utilisons les contraintes budgétaires pour déterminer le choix de consommation :

$$\hat{c}_t = \hat{m}_t - \hat{d} + g(\hat{d}).$$

Les états correspondants postérieurs à la décision sont

$$\begin{aligned}\hat{a}_t &= 0, \\ \hat{b}_t &= \hat{n}_t + \hat{d}.\end{aligned}$$

En interpolant les valeurs de $w_t(a_t, b_t, \kappa_{t-1})$ sur la grille commune $\mathcal{G}_t^{a,b,\kappa}$, nous pouvons calculer $w_t(\hat{a}_t, \hat{b}_t, \hat{\kappa}_{t-1})$ et donc la valeur de $V_t(\hat{m}_t, \hat{n}_t, \hat{\kappa}_{t-1})$ par

$$V_t(\hat{m}_t, \hat{n}_t, \hat{\kappa}_{t-1}) = u(\hat{c}_t) + \beta w_t(\hat{a}_t, \hat{b}_t, \hat{\kappa}_{t-1}).$$

Cas 2. Segments avec seulement d_t limité : $a_t > 0$ et $d_t = \hat{d} \in \{0, Y_t - h_j, Y_t - h_{j-1}, \dots, Y_t - h_{\hat{n}+1}, Y_t - h_{\hat{n}}\}$

Étant donné un point $(\tilde{a}_t, \tilde{b}_t, \tilde{\kappa}_{t-1})$ sur la grille commune $\mathcal{G}_t^{a,b,\kappa}$, nous pouvons calculer le choix de consommation optimale correspondant \tilde{c}_t à l'aide des CPO comme suit :

$$\tilde{c}_t = [\beta w_{t,a}(\tilde{a}_t, \tilde{b}_t, \tilde{\kappa}_{t-1})]^{-\frac{1}{\gamma}}$$

En utilisant les contraintes budgétaires, nous pouvons inverser les valeurs des états endogènes correspondants préalables à la décision :

$$\begin{aligned}\tilde{m}_t &= \tilde{c}_t + \hat{d} - g(\hat{d}), \\ \tilde{n}_t &= \tilde{b}_t - \hat{d}.\end{aligned}$$

La fonction de valeur $V_t(\tilde{m}_t, \tilde{n}_t, \tilde{\kappa}_{t-1})$ peut également être évaluée. Par conséquent, pour tous les points de la grille commune par rapport aux états postérieurs à la décision $\mathcal{G}_t^{a,b,\kappa}$, nous avons des ensembles de nœuds contenant des choix optimaux, des états préalables à la décision et des fonctions de valeur évaluées. Il convient de souligner que les états préalables à la décision dans les ensembles de nœuds sont calculés de façon endogène plutôt qu'exogène et qu'ils forment donc une grille endogène irrégulière. Afin de calculer la fonction de valeur pour la grille commune régulière $\mathcal{G}_t^{m,n,\kappa}$, nous suivons les étapes proposées par Druedahl et Jørgensen (2017) :

1. Triangulation locale.
 - a) Calculer un ensemble de simplexes de manière à ce qu'aucun point de données sur $\mathcal{G}_t^{a,b,\kappa}$ ne soit contenu dans les circonsphères des simplexes. L'ensemble de simplexes forme la triangulation de Delaunay.
 - b) Déterminer les simplexes correspondants cartographiés dans l'espace (m_t, n_t, κ_{t-1}) .
 - c) Construire les rectangles de délimitation des simplexes dans l'espace (m_t, n_t, κ_{t-1}) .
2. Interpolation avec la grille d'état commune préalable à la décision $\mathcal{G}_t^{m,n,\kappa}$ et la première enveloppe supérieure. Pour chaque rectangle de délimitation :
 - a) Trouver les nœuds dans la grille d'état commune préalable à la décision $\mathcal{G}_t^{m,n,\kappa}$ à l'intérieur du rectangle de délimitation.
 - b) Trouver des choix possibles pour chaque nœud de variable d'état $(m_t, n_t, \kappa_{t-1}) \in \mathcal{G}_t^{m,n,\kappa}$ à l'intérieur du rectangle de délimitation, à l'aide d'une interpolation barycentrique. Pour limiter l'utilisation de l'extrapolation, nous ne tenons pas compte des points dont les coefficients de pondération barycentriques sont inférieurs à -0.125 .
 - c) Calculer la fonction de valeur implicite de ces choix interpolés.
 - d) Mettre à jour le choix optimal si aucun ensemble de choix antérieurs n'a produit une valeur de choix plus élevée.

Les étapes ci-dessus permettent d'évaluer la fonction de valeur des nœuds dans la grille commune $\mathcal{G}_t^{m,n,\kappa}$.

Cas 3. Segments avec seulement c_t limité : $a_t = 0$ et $d_t \in (ld, ud)$

La façon dont nous segmentons d_t fait en sorte que $g(d_t)$ est différentiable pour $d_t \in (ld, ud)$ et que $g_d(d_t)$ est une constante. Supposons

$$\tilde{v}_t(a_t, b_t, \kappa_{t-1}) = u(c_t) + \beta w_t(a_t, b_t, \kappa_{t-1}).$$

À partir de $a_t = 0$, nous avons

$$c_t = m_t - d_t + g(d_t)$$

Nous obtenons le dérivé de premier ordre pour d_t comme suit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{v}_t(a_t, b_t, k_t)}{\partial d_t} &= \frac{\partial u(c_t)}{\partial c_t} \frac{\partial c_t}{\partial d_t} + \beta \left[w_{t,a}(a_t, b_t, k_t) \frac{\partial a_t}{\partial d_t} + w_{t,b}(a_t, b_t, k_t) \frac{\partial b_t}{\partial d_t} \right] \\ &= c_t^{-\gamma} [-1 + g_d(d_t)] + \beta w_{t,b}(0, b_t, k_t) \end{aligned}$$

Veillez noter qu'à partir de $a_t = 0$, nous avons $\frac{\partial a_t}{\partial d_t} = 0$. Une fois b_t et c_t réparés, le dérivé ci-dessus est une constante puisque $g_d(d_t)$ est une constante pour $d_t \in (ld, ud)$. Il n'y a donc pas de CPO pour d_t . De plus, $\tilde{v}_t(a_t, b_t, k_t)$ approche son maximum lorsque d_t approche soit lb , soit ub . Puisque $\tilde{v}_t(a_t, b_t, k_t)$ est défini et continu à ld et ud , la valeur pouvant être obtenue dans ce cas est toujours inférieure à celle obtenue dans le cas 1. Par conséquent, ce cas devrait être éliminé.

Cas 4. Segments sans limites : $a_t > 0$ et $d_t \in (ld, ud)$

En supposant un nœud $(\tilde{a}_t, \tilde{b}_t, \tilde{\kappa}_{t-1})$ sur la grille commune $\mathcal{G}_t^{a,b,\kappa}$, nous utilisons les CPO pour déterminer les choix optimaux du candidat :

$$\tilde{c}_t = [\beta w_{t,a}(\tilde{a}_t, \tilde{b}_t, \tilde{\kappa}_{t-1})]^{-\frac{1}{\gamma}}$$

Toutefois, il n'y a pas de CPO pour d_t . Revoyons le dérivé de premier ordre de d_t lorsque c_t est sans limite :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{v}_t(a_t, b_t, \kappa_t)}{\partial d_t} &= \beta \left[\frac{\partial w_{t,a}(a_t, b_t, \kappa_{t-1})}{\partial a_t} \frac{\partial a_t}{\partial d_t} + \frac{\partial w_{t,b}(a_t, b_t, \kappa_{t-1})}{\partial b_t} \frac{\partial b_t}{\partial d_t} \right] \\ &= \beta [w_{t,a}(a_t, b_t, \kappa_t)(-1 + g_d(d_t)) + w_{t,b}(a_t, b_t, \kappa_t)] \end{aligned}$$

Puisque $g_d(d_t)$ est une constante, le dérivé de premier ordre est également une constante. La fonction de valeur est en fait une fonction linéaire de d_t dans ce segment, étant donné le point de grille exogène postérieur à la décision $(\tilde{a}_t, \tilde{b}_t, \tilde{\kappa}_{t-1})$ et elle approche son maximum lorsque d_t approche soit lb , soit ub . Puisque la fonction de valeur est définie et continue à lb et ub , la fonction de valeur maximale pouvant être obtenue dans ce cas est toujours inférieure à celles obtenues dans le cas 2. Par conséquent, ce cas devrait également être éliminé.

C.3 Deuxième enveloppe supérieure sur les segments

En combinant les quatre cas discutés ci-dessus, les segments que nous considérons devraient toujours contraindre d_t . Par conséquent, le nombre total de segments est de $2(i - \hat{n} + 3)$. Pour chaque segment, nous avons évalué $V_t(m_t, n_t, \kappa_{t-1})$ pour tous les nœuds de la grille commune $\mathcal{G}_t^{m,n,\kappa}$. Comme dernière étape, nous appliquons une autre enveloppe à tous les segments. Pour chaque nœud de la grille commune $\mathcal{G}_t^{m,n,\kappa}$, le choix optimal correspond au segment ayant la valeur de choix la plus élevée.

Annexe D – Calcul des conditions de premier ordre

Supposons que la fonction de valeur de continuation est différentiable en ce qui concerne c_t et d_t . Les choix optimaux doivent satisfaire aux CPO :

$$c_t^{-\gamma} + \beta \frac{\partial w_t(a_t, b_t, k_{t-1})}{\partial a_t} \frac{\partial a_t}{\partial c_t} = 0,$$

$$\beta \left[\frac{\partial w_t(a_t, b_t, k_{t-1})}{\partial a_t} \frac{\partial a_t}{\partial d_t} + \frac{\partial w_t(a_t, b_t, k_{t-1})}{\partial b_t} \frac{\partial b_t}{\partial d_t} \right] = 0.$$

Soit

$$a_t = m_t - c_t - d_t + g(d_t),$$

$$b_t = n_t + d_t,$$

nous avons

$$\frac{\partial a_t}{\partial c_t} = -1$$

$$\frac{\partial a_t}{\partial d_t} = -1 + \frac{\partial g(d_t)}{\partial d_t}$$

$$\frac{\partial b_t}{\partial d_t} = 1.$$

Étant donné un point de grille exogène, $[a_t, b_t, k_t]$, le choix optimal peut être obtenu en résolvant les deux équations. Supposons que la fonction de valeur est différentiable en ce qui concerne c_t et d_t . En utilisant les CPO, les choix optimaux peuvent être formulés comme suit :

$$\hat{c}_t = [\beta w_{t,a}(a_t, b_t, k_t)]^{\frac{1}{\gamma}},$$

$$\hat{d}_t = g_d^{-1} \left(\frac{w_{t,a}(a_t, b_t, k_t) - w_{t,b}(a_t, b_t, k_t)}{w_{t,a}(a_t, b_t, k_t)} \right),$$

où

$$w_{t,a}(a_t, b_t, k_t) = \frac{\partial w_t(a_t, b_t, k_t)}{\partial a_t},$$

$$w_{t,b}(a_t, b_t, k_t) = \frac{\partial w_t(a_t, b_t, k_t)}{\partial b_t},$$

$$g_d(d_t) = \frac{\partial g(d_t)}{\partial d_t},$$

et $g_d^{-1}(\cdot)$ est la fonction inverse de $g_d(\cdot)$. On suppose que les dérivés de premier ordre sont convexes et que les CPO sont à la fois nécessaires et suffisantes. Par conséquent, \hat{c}_t et \hat{d}_t doivent constituer le choix optimal unique pour le point de grille exogène $[a_t, b_t, k_t]$.

Références

- Bellman, R. E. *Dynamic Programming*. Princeton University Press, Princeton, 1957.
- Brouhns, N., Denuit, M., et Keilegom, I.V. « Bootstrapping the Poisson log-bilinear model for mortality forecasting », *Scandinavian Actuarial Journal*, vol. 3, 2005, 212-224.
- Carroll, C.D. « The Method of Endogenous Gridpoints for Solving Dynamic Stochastic Optimization Problems ». *Economics Letters*, vol. 91, n° 3, 2006, pp. 312-320.
- Druedahl, J. et T. Jørgensen. « A General Endogene Grid Method for Multi-Dimensional Models with Non-Convexities and Constraints », *Journal of Economic Dynamics and Control*, vol. 74(C), 2017, pp. 87-107.
- Gong, G. et A. Webb. « Evaluating the Advanced Life Deferred Annuity - An Annuity people might actually buy », *Insurance: Mathematics and Economics*. Vol. 46, n° 1, 2010, pp. 210-221.
- Horneff, V., Maurer, R. et O.S. Mitchell. « Putting the Pension Back in 401(k) Plans: Optimal versus Default Longevity Income Annuities », *NBER Working Paper No. 22717*, 2016. Téléchargé à www.nber.org/papers/w22717
- Huang, H., Milevsky, M.A. et T. Salisbury. « A different Perspective on Retirement Income Sustainability: The Blueprint for a Ruin Contingent Life Annuity (RCLA) », *Journal of Wealth Management*, vol. 11, n° 4, 2009, pp. 89-96.
- Huang, H., Milevsky, M. et T. Salisbury. « Valuation and Hedging of the Ruin-Contingent Life Annuity (RCLA) », *Journal of Risk and Insurance*, vol. 81, n° 2, 2014, pp. 367-395.
- Lee, R. D., et L.R. Carter. « Modeling and Forecasting U.S. Mortality », *Journal of the American Statistical Association*, vol. 87, n° 419, 1992, pp. 659-671.
- Li, N. et R. Lee. « Coherent mortality forecasts for a Group of Populations. An Extension of the Lee-Carter Method », *Demography*, vol. 42, n° 3, 2005, pp. 575-594.
- Maurer, R., Mitchell, O. S., Rogalla, R. et V. Kartashov. « Lifecycle Portfolio Choice With Systematic Longevity Risk and Variable Investment-Linked Deferred Annuities », *Journal of Risk and Insurance*, vol. 80, n° 3, 2013, pp. 649-676.
- Milevsky, M. A. « Real Longevity Insurance with a Deductible: Introduction to Advanced-Life Delayed Annuities (ALDA) », *North American Actuarial Journal*. Vol. 9, n° 4, 2005, pp. 109-122.
- Pfau, W., Tomlinson, J. et S. Vernon. « Optimizing Retirement Income Solutions in Defined Contribution Retirement Plans », 2016. Téléchargé à <http://longevity3.stanford.edu/optimal-retirement-income-solutions-in-defined-contribution-retirement-plans/>
- Yaari, M. E. « Uncertain Lifetime, Life Insurance, and the Theory of the Consumer », *Review of Economic Studies*, vol. 32, n° 2, 1965, pp. 137-150.