

Document de recherche

**Structure tarifaire à point culminant pour les
rentes variables**

**David Landriault, Bin Li, et Yumin Wang, Université de Waterloo,
et Dongchen Li, Université de St-Thomas**

Mars 2021

Document rp221027

This document is available in English.

© 2021 Institut canadien des actuaires

Résumé

La structure tarifaire des rentes variables est importante tant pour les assureurs que pour les titulaires de police. Une structure tarifaire bien conçue peut permettre de réduire l'exposition au risque de l'assureur et d'accroître du même coup le bien-être du titulaire de police. Nous proposons donc une rente variable assortie d'une nouvelle structure tarifaire à point culminant (STPC) et nous en examinons les répercussions pour l'assureur et le titulaire de police.

Du point de vue de l'assureur, nous déterminons d'abord les frais d'assurance équitables dans le cadre conventionnel de tarification risque-neutre, puis nous discutons des répercussions de la gestion du risque par l'assureur.

Du point de vue du titulaire de police, nous envisageons trois types de titulaires de police avec préférence pour la moyenne-variance, à savoir un titulaire de police novice, un titulaire de police novice avec chocs exogènes et un titulaire de police avisé. Nous évaluons d'abord le bien-être de ces titulaires de police dans le contexte de la rente variable avec structure tarifaire à point culminant. Puis, nous intégrons une analyse comparative du bien-être des titulaires de police en vertu d'une tarification constante et d'une tarification soumise à des contraintes qui sont fonction de la conjoncture. Nous constatons que la structure tarifaire à point culminant peut généralement accroître le bien-être du titulaire de police par rapport aux deux autres structures tarifaires. Plus précisément, la structure tarifaire à point culminant est plus avantageuse pour les titulaires de police qui sont plus réfractaires au risque, plus susceptibles de subir des chocs exogènes et dont la durée du contrat est plus courte. En outre, nous observons que la structure tarifaire à point culminant est plus robuste pour le bien-être des titulaires de police pour toute une gamme de préférences en matière de risque et qu'elle est donc plus négociable que les deux autres structures tarifaires.

1 Introduction

Les rentes variables (RV) sont des produits d'assurance indexés sur actions émis par des sociétés d'assurances. Grâce à leurs options de placement souples, au régime favorable de report d'impôt et à leurs garanties de stabilité à long terme, elles ont représenté l'un des instruments de placement les plus répandus au cours des deux dernières décennies. À l'entrée en vigueur d'un contrat de RV, un titulaire de police verse une prime initiale forfaitaire à un assureur, qui l'investit dans un panier de fonds communs de placement attribués à l'avance (souvent désigné fonds de police) en ouvrant un compte de placement pour suivre le rendement du fonds de police. Les versements effectués en vertu d'un contrat de RV sont souvent assujettis à certaines garanties minimales qui s'appliquent lorsque le rendement du fonds de polices est faible. Pour financer ces garanties, l'assureur épuise périodiquement le compte de placement en facturant des frais d'assurance. Le titulaire de police peut également renoncer au contrat de RV avant l'échéance, sous réserve d'une pénalité de rachat prédéterminée.

Ainsi, un contrat standard de RV avec versements minimaux garantis protège le titulaire de police des conditions de marché baissières tout en lui permettant de tirer un gain financier des mouvements haussiers du marché. Par ailleurs, l'assureur s'expose à divers risques, entre autres le risque de marché financier, le risque de mortalité et le risque de comportement du titulaire de police (p. ex., le risque de rachat).

Quoi qu'il en soit, même en tenant compte des avantages apparemment importants pour les titulaires de police, le marché des RV a connu une baisse des ventes au cours des cinq dernières années. De nombreuses raisons ont été évoquées pour expliquer cette tendance, plus particulièrement les frais d'assurance élevés associés aux RV (voir Bernard et Moenig, 2017). La léthargie du marché des RV souligne l'importance de la structure tarifaire dans la négociabilité de ces rentes. D'une part, des structures de frais différentes induisent des incitatifs différents pour les titulaires de police dont les préférences et les objectifs individuels sont quelque peu uniques. D'autre part, en influençant le comportement des titulaires de police, chaque structure tarifaire a ses propres répercussions sur les activités de gestion des risques de l'assureur. Il serait préférable de recourir à une structure tarifaire qui garantit l'équilibre entre les intérêts et les préférences des assureurs et des titulaires de police.

Pour les RV, la structure de frais la plus courante est celle que l'on appelle *structure de frais constants*, qui permet de prélever provisoirement un pourcentage fixe du compte de placements à titre de frais d'assurance. Comme l'ont souligné de nombreux chercheurs, il est connu que cette structure tarifaire qui ne varie pas dans le temps et qui n'est pas fonction de la conjoncture incite les titulaires de police à racheter le contrat de RV lorsque la valeur du compte de placement augmente, car ils paient des frais d'assurance élevés pour obtenir des garanties à valeur négligeable. Compte tenu de ce problème, quelques documents de recherche ont porté sur des solutions éclairées pour concevoir des structures tarifaires plus favorables. Par exemple, Bernard et Moenig (2017) proposent une structure tarifaire temporelle, en vertu de laquelle les frais d'assurance sont réduits après une certaine période minimale. En décourageant implicitement le titulaire de police de racheter le contrat, il est démontré que la structure tarifaire temporelle réduit les frais d'assurance tout en maintenant la rentabilité du contrat de RV pour les assureurs. Bernard et coll. (2016) et Cui et coll. (2017) envisagent une structure tarifaire indexée sur l'indice VIX et ils montrent son attrait pour aider à recentrer la perception des frais d'assurance sur la responsabilité de l'assureur, ce qui pourrait contribuer à réduire l'incitatif de rachat pour le titulaire de police. En lien direct avec le travail actuel, Bernard et coll. (2014) proposent une structure tarifaire qui est fonction de la conjoncture, qui prévoit la facturation de frais constants uniquement lorsque la valeur du compte de placement est inférieure à un certain seuil. Puis, MacKay et coll. (2017) démontrent que la structure tarifaire qui est fonction de la conjoncture peut rendre le comportement de rachat complètement sous-optimal en imposant une certaine pénalité de rachat négociable.

Même si la plupart des documents susmentionnés montrent que les nouvelles structures tarifaires proposées sont utiles pour mieux harmoniser le passif de l'assureur et la perception des frais d'assurance (ce qui est donc avantageux pour l'assureur en raison de la réduction du risque de rachat), on sait peu de choses sur l'incidence éventuelle de ces structures tarifaires sur les titulaires de police. La structure de frais constants a pour principal inconvénient que les frais à pourcentage fixe ne s'adaptent pas aux incitatifs visant les titulaires de police dans diverses

conditions du marché et qu'ils nuisent donc au bien-être des titulaires de police, ce qui finit par miner la négociabilité des RV. Toutefois, en se concentrant principalement sur les répercussions de la gestion des risques de l'assureur, l'analyse ne tient pas compte de façon exhaustive des intérêts des deux parties dans l'opération financière.

Par conséquent, le présent document vise à proposer une rente variable assortie d'une nouvelle *structure tarifaire à point culminant* (STPC) et à en examiner le bien-fondé pour le titulaire de police et l'assureur. On suppose que cette structure combine des caractéristiques provenant de frais constants qui sont fonction de la conjoncture et d'un tarif STPC à l'état pur. Plus précisément, en plus de frais constants qui sont fonction de la conjoncture, la STPC est conçue pour facturer des frais à point culminant (FPC) lorsque le compte de placement atteint de nouveaux sommets au-delà d'un certain seuil. Nous démontrerons que la STPC réduit la variance des versements de RV en stabilisant le compte de placement, une caractéristique souhaitable pour un titulaire de police réfractaire au risque. Cette situation est attribuable à la conception inhérente de la STPC, qui consiste à imposer des frais constants réduits lorsque la valeur du compte de placement est faible, tout en limitant le taux de croissance de ce compte lorsque le marché financier offre de bons rendements. Grâce à la spécification des FPC, nous démontrerons que les RV résultants présentent divers niveaux de stabilité. Toutefois, cela aura pour effet d'accroître le risque de rachat lorsque le compte de placement deviendra important par rapport à la structure des frais constants qui sont fonction de la conjoncture.

Il convient de noter que les FPC sont souvent appliqués dans l'industrie des fonds de couverture où une structure tarifaire deux-et-vingt¹ est largement acceptée. L'incidence des FPC sur les investisseurs et les gestionnaires de fonds dans le fonds de couverture a été bien documentée; voir par exemple Guasoni et Oblój (2016) et les renvois s'y rapportant. Toutefois, nous tenons à souligner que l'application proposée de FPC dans les RV est fondamentalement différente de son utilisation dans les fonds de couverture. En effet, dans les fonds de couverture, les FPC servent à rémunérer les gestionnaires pour leurs compétences tandis qu'en RV, ils sont utilisés pour financer les garanties intégrées.

En ce qui concerne l'analyse, nous proposons d'adopter l'approche de tarification risque-neutre pour déterminer les frais d'assurance équitables² pour les RV au moyen de la STPC. Il s'agit de l'approche conventionnelle de tarification des RV dans la documentation; voir par exemple Bauer et coll. (2008), Dai et coll. (2008), Huang et Kwok (2016), Milevsky et Salisbury (2001, 2006), Milevsky et Salisbury (2002), et les renvois s'y rapportant.

Dans le cadre de la tarification risque-neutre, les titulaires de police ont avantage à maximiser la valeur actualisée attendue (VAA) des paiements en espèces futurs puisque chaque agent est en mesure de reproduire tous les paiements en espèces possibles dans un marché complet sans friction. Dans ce qui suit, nous désignons cette stratégie optimale des titulaires de police comme *stratégie de tarification risque-neutre*. Nous supposons qu'il est important que les titulaires de police suivent cette stratégie, bien qu'elle puisse s'écarter du comportement empirique des titulaires de police. La raison en est que cette stratégie correspond au passif le plus défavorable

¹ Frais constants de 2 % pour l'actif sous gestion et FPC de 20 % pour la nouvelle STPC

² Les frais équitables sont également désignés frais d'équilibre. Il s'agit des frais qui visent à faire correspondre la valeur actualisée attendue des paiements en espèces futurs destinés aux titulaires de police à leurs primes initiales.

(aussi appelé *coût de couverture* dans Forsyth et Vetzal, 2014) pour les assureurs. En d'autres termes, en adoptant cette stratégie au moment de la tarification, les assureurs peuvent couvrir toutes les sorties de trésorerie possibles sans risque.

Du point de vue des titulaires de police, nous évaluons le bien-être rattaché à la possession des RV en supposant une préférence de risque à moyenne-variance (MV). Nous effectuons une analyse comparative en tenant également compte du bien-être des titulaires de police en vertu des structures de frais constants et de frais qui sont fonction de la conjoncture. Dans un marché complet et sans friction, la stratégie de tarification risque-neutre devrait refléter entièrement le comportement des titulaires de police (pour plus de détails, voir Bauer et coll., 2017). Toutefois, le marché de l'assurance-vie n'est ni complet ni sans friction et l'on peut constater une discordance importante entre le comportement empirique des titulaires de police et le comportement de tarification risque-neutre (voir, p. ex., Bauer et coll., 2017, Azimzadeh et coll., 2014 et Moenig et Bauer, 2015). Par conséquent, il est nécessaire d'évaluer le bien-être des titulaires de police en supposant un ensemble de préférences différent de celui de la stratégie de tarification risque-neutre. L'analyse de la MV de Markowitz (1952) jette les bases de la théorie moderne du portefeuille en officialisant l'énoncé du compromis de l'investisseur entre le risque et le rendement d'une stratégie.

Les titulaires de police devraient donc tenir compte de la variance des versements de RV, car une faible variance indique des versements en espèces stables, ce qui est une vertu pour un instrument de placement à long terme comme les RV. Pour tenir compte de la diversité des comportements des titulaires de police, nous considérons trois types de titulaires de police : *le titulaire de police novice*, *le titulaire de police novice avec chocs exogènes* et *le titulaire de police avisé*. Le titulaire de police novice correspond au titulaire de police dont la littératie financière ou les connaissances du marché sont insuffisantes et qui rejette donc les options de rachat intégrées aux RV; le titulaire de police novice aux prises avec des chocs exogènes dans sa vie et qui rachète le contrat de RV de façon sous-optimale à un moment aléatoire indépendant; enfin, le titulaire de police avisé correspond au titulaire de police dont la littératie financière et les connaissances du marché sont adéquates et qui rachète le contrat de RV de façon optimale. Nous examinons le bien-être des deux premiers types de titulaires de police en évaluant la moyenne et la variance des versements de RV. Nous examinons le bien-être du titulaire de police avisé en nous attaquant à l'incohérence temporelle découlant d'un problème d'arrêt optimal de la MV.

En évaluant le bien-être des trois types de titulaires de police susmentionnés avec une préférence pour la MV, nous démontrerons que la STPC peut, de façon générale, améliorer le bien-être des titulaires de police par rapport aux structures de frais constants et de frais qui sont fonction de la conjoncture. Plus précisément, la STPC est plus favorable pour les titulaires de police davantage réfractaires au risque, plus susceptibles de subir des chocs exogènes pendant la durée de la police, et dont le contrat est de plus courte durée. En outre, la STPC est plus robuste pour le bien-être des titulaires de police pour une gamme de préférences en matière de risque et elle est donc plus négociable que les structures de tarifs constants et de tarifs qui sont fonction de la conjoncture.

Les principales contributions au présent document sont résumées en quatre points :

- Nous proposons une structure tarifaire des RV à point culminant et nous en démontrons les avantages pour ce qui est de stabiliser le compte de placement et de réduire la variance des versements de RV.
- L'analyse d'un contrat de RV fondée sur la STPC est effectuée en tenant compte de l'intérêt des deux parties (titulaires de police et assureurs) dans le cadre de l'opération. Les documents relatifs aux RV portent en grande majorité sur la tarification (et la couverture) d'un certain produit de RV. Dans le présent document, nous examinons le bien-être d'un groupe varié de titulaires de police au sein d'un ensemble de RV dans le cadre de la STPC (comme dans l'esprit de Steinorth et Mitchell, 2015).
- Pour étudier le bien-être du titulaire de police avisé, nous établissons officiellement un système d'équations étendues de Hamilton-Jacobi-Bellman (équations EHJB) correspondant à un problème d'arrêt optimal de la MV à deux variables qui sont fonction de la conjoncture et dont l'horizon est aléatoire. La complexité découlant de la grande dimension et de l'horizon aléatoire est surmontée. Il convient de souligner que de nombreux documents traitent des problèmes de contrôle stochastique en vertu du critère de MV à la suite des travaux précurseurs effectués par Basak et Chabakauri (2010), Björk et Murgoci (2010) et Zhou et Li (2000). Toutefois, la documentation sur les problèmes d'arrêt optimal de la MV est plutôt rare. Les travaux actuels peuvent aider à combler ce vide.
- Notons que la résolution d'un système d'équations EHJB correspondant à un problème de contrôle optimal de la MV peut parfois être réduite à la résolution d'un système d'équations différentielles ordinaires (EDO), compte tenu de la forme semi-explicite de la fonction de valeur. Cependant, pour un problème d'arrêt optimal de la MV avec horizon fini, on ne peut avoir recours qu'à des solutions numériques en raison de l'absence d'une solution explicite pour la fonction de valeur. Par conséquent, nous élaborons un algorithme fondé sur Wang et Forsyth (2011) pour résoudre le système d'équations EHJB. Nous allons plus loin que Wang et Forsyth (2011) en établissant le lien entre le système des équations EHJB et l'algorithme proposé.

Voici le plan de l'étude. La section 2 présente officiellement la RV avec STPC et son modèle de tarification risque-neutre. La section 3 présente des exemples numériques des frais d'assurance équitables et des régions de rachat correspondantes pour un titulaire de police à tarification risque-neutre selon la STPC. À des fins de comparaison, nous présentons également les résultats correspondants pour les structures à tarifs constants et à tarifs qui sont fonction de la conjoncture. Les sections 4, 5 et 6 évaluent le bien-être d'un titulaire de police novice, d'un titulaire de police novice avec chocs exogènes et d'un titulaire de police avisé, respectivement, en vertu de la STPC. Une fois de plus, nous menons une analyse comparative pour examiner le bien-être des titulaires de police en vertu des structures à frais constants et à frais qui sont fonction de la conjoncture. La section 7 constitue la conclusion. Des démonstrations et certains résultats techniques sont présentés aux annexes.

2 Le modèle de tarification risque-neutre

Dans la présente section, nous décrivons en détail le contrat de RV à l'étude et nous formulons son modèle de tarification risque-neutre dans un cadre stochastique d'arrêt optimal en temps continu.

2.1 Le contrat

Considérons un contrat de RV avec échéance $T > 0$. Au début du contrat, le titulaire de police verse une prime initiale P qui est investie dans un panier de fonds prédéterminé, soit le fonds de police. L'assureur établit un compte de placement F pour suivre le rendement du fonds de police sous-jacent avec $F_0 = P$. On suppose que le contrat de RV comporte les garanties intégrées suivantes :

- **Prestation de décès minimales garanties (PDMG)** : au décès du titulaire de police au moment $t \in (0, T)$, le contrat précise que la prestation de décès correspond au plus élevé des montants suivants : F_t et le montant garanti G_t .
- **Prestation à échéance minimale garantie (PEMG)** : à l'échéance du contrat T , un versement égal au plus élevé du montant du compte de placement F_T et du montant garanti G_T est versé au titulaire de police.

Dans ce qui suit, nous supposons que le montant garanti augmente continuellement à un taux $g \geq 0$ avant l'échéance du contrat, c.-à-d. $G_t = G_0 e^{gt}$ pour $t \in (0, T]$. Il convient de noter que le taux de cumul g ne doit pas être supérieur au taux sans risque r pour exclure les possibilités d'arbitrage.

Entre-temps, le titulaire de police est autorisé à racheter le contrat de RV à tout moment avant l'échéance. Si ce droit de rachat est exercé, aucune garantie n'est applicable et une pénalité κ est imposée sur le solde du compte de placement. Ainsi, au moment du rachat, le titulaire de police recevra $(1 - \kappa_t)F_t$ à $t \in [0, T)$. Pour décourager le comportement de rachat anticipé, la pénalité de rachat κ_t est habituellement présumée diminuer avec le temps.

2.2 Évolution du compte de placement

Supposons un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{Q})$, avec filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{0 \leq t \leq T}$ conforme aux conditions habituelles, où \mathbb{Q} est une mesure martingale équivalente. En vertu de cette mesure, nous supposons que le processus de valeur du fonds de police S suit un mouvement brownien géométrique avec dynamique

$$\frac{dS_t}{S_t} = r dt + \sigma dW_t^{\mathbb{Q}},$$

où $r > 0$, $\sigma > 0$ et $\{W^Q\}_{t \geq 0}$ représentent un mouvement brownien en vertu de Q . Selon la STPC, les frais d'assurance renferment deux composantes, à savoir des frais constants continuellement facturés à un taux $c \geq 0$ lorsque le compte de placement est inférieur à un certain seuil ϑ , et des FPC à tarif $\alpha \geq 0$ facturés lorsque le compte de placement atteint de nouveaux sommets au-dessus du seuil ϑ^3 . En vertu de Q , la dynamique du compte de placement dans le cadre de la STPC est présumée correspondre à

$$dF_t = (r - c1\{F_t \leq \vartheta\})F_t dt + \sigma F_t dW_t^Q - \alpha 1\{F_t \geq \vartheta\} dM_t, \quad (1)$$

où

$$M_t = \sup_{0 \leq s \leq t} F_s$$

désigne les FPC du compte de placement au temps t . À des fins de comparaison, nous introduisons également la dynamique du compte de placement sous deux autres structures tarifaires pour les RV :

- La structure de frais constants :

$$dF_t = (r - c)F_t dt + \sigma F_t dW_t^Q, \text{ et}$$

- La structure de frais qui sont fonction de la conjoncture (Bernard et coll., 2014) :

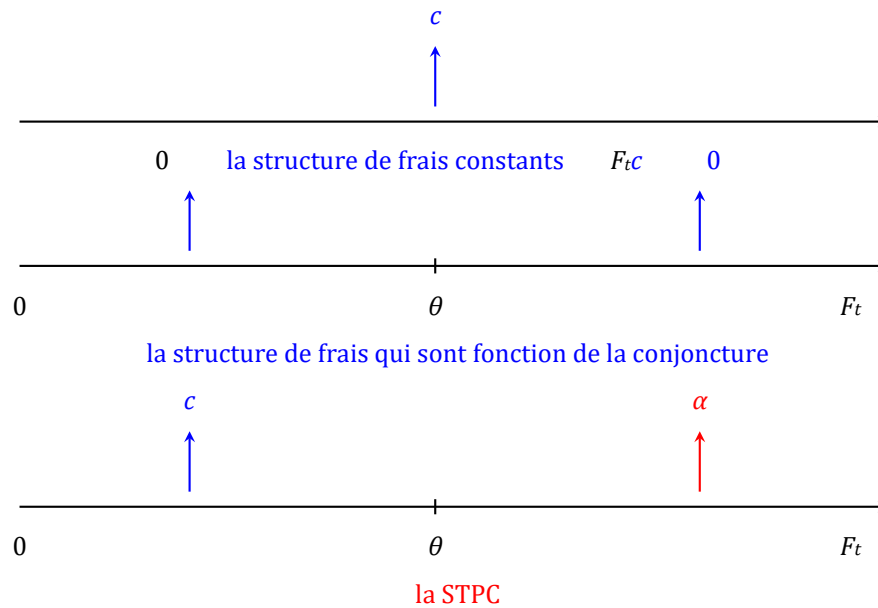
$$dF_t = (r - c1\{F_t \leq \theta\})F_t dt + \sigma F_t dW_t^Q.$$

Notons que le même paramètre c est utilisé pour représenter les frais constants dans les trois structures tarifaires. Cependant, en vertu du modèle d'évaluation risque-neutre, le paramètre c de la STPC sera différent de ceux de la structure de tarifs constants ou de frais qui sont fonction de la conjoncture. Nous utilisons le même paramètre c dans les trois structures tarifaires pour faciliter la notation.

Une illustration graphique du mécanisme des trois structures tarifaires est présentée à la figure 1. Il convient de souligner que la STPC est ramenée à la structure des frais qui sont fonction de la conjoncture si $\alpha = 0$. En outre, la structure de frais constants peut être considérée comme un cas limitatif de la STPC quand $\theta \rightarrow \infty$.

³ Il convient de souligner que la STPC peut être généralisée avec le cas à l'aide de deux seuils, par exemple ϑ_1 et ϑ_2 . Seuls les frais constants c sont en vigueur lorsque le compte de placement est inférieur à ϑ_1 et seuls les FPC sont en vigueur lorsque le compte de placement atteint de nouveaux sommets ϑ_2 .

Figure 1 : Illustration graphique du mécanisme de tarification pour la structure de frais constants, la structure de tarifs qui sont fonction de la conjoncture et la STPC.



2.3 Le modèle de mortalité

À partir de l'inclusion des PDMG, l'assureur est exposé au risque de mortalité. Le fait de ne négocier que des actions et des obligations ne peut pas reproduire entièrement les sinistres d'assurance liés à la mortalité puisque les actifs fondés sur la mortalité sont rares sur les marchés financiers (voir Møller, 1998, pour plus de détails). Cela donne lieu à un marché incomplet. Pour corriger ce problème, il est courant dans la documentation actuarielle de formuler les deux hypothèses suivantes : le risque de marché financier et le risque de mortalité sont indépendants et l'assureur est risque-neutre en ce qui concerne le risque de mortalité; voir, par exemple, Aase et Persson (1994) et Bauer et coll. (2008). Dans le présent document, nous nous conformons à cette convention pour la tarification des RV. Selon les deux hypothèses, la mesure risque-neutre des marchés financiers et d'assurance combinés est la mesure du produit de Q et de la mesure physique du risque de mortalité. Avec un léger abus de notation, nous désignerons dorénavant cette mesure de produit par Q.

Par souci de commodité, nous désignons par p_x la durée de vie future d'un titulaire de police de x ans dont la fonction de survie est définie par

$${}_s p_x = \mathbb{P}(\rho_x > s) = e^{-\int_0^s \lambda_{x+u} du}, \text{ pour } s \geq 0,$$

où λ_{x+u} est la force de mortalité du titulaire de police à l'âge $x + u$. Dans ce qui suit, nous ne tenons pas compte de la souscription x de p_x par souci de concision.

2.4 Tarification des contrats de RV

En ce qui concerne la tarification des contrats de RV, nous utilisons sa ressemblance avec les dérivés financiers (p. ex., options de vente) et nous appliquons la méthode de tarification risque-neutre. Plus précisément, dans le cadre de tarification risque-neutre, l'assureur et le titulaire de police sont en mesure de reproduire tous les versements en espèces possibles au titre des RV. En outre, le comportement du titulaire de police est également pris en compte en raison de l'option de rachat intégrée au contrat. Dans le cadre de tarification risque-neutre, il est courant pour le titulaire de police de maximiser la VAA des versements en espèces futurs, une stratégie connue sous le nom de *stratégie de tarification risque-neutre*. La raison en est que les versements en espèces issus d'autres préférences du titulaire de police peuvent également être reproduits et ils produiront une valeur inférieure à celle correspondant à la stratégie de tarification risque-neutre. Compte tenu de ce qui précède, nous formulons la tarification du contrat de RV à l'intérieur d'un cadre stochastique d'arrêt optimal à temps continu et nous supposons que le titulaire de police rachète le contrat de façon optimale pour maximiser la VAA des versements en espèces futurs.

Désignons l'ensemble de tous les temps d'arrêt τ évalués dans $[t, T]$ par $T_{[t, T]}$. Pour la STPC, les versements en espèces des RV dépendent du cours sous-jacent et donc la variable d'état m définie comme étant

$$M_t = \sup_{0 \leq s \leq t} F_s = m,$$

est ajoutée pour préserver la propriété de Markov. Supposons que O^- est la fermeture de l'ensemble $O = \{(F, m) \in \mathbb{R}_+^2 : 0 < F < m\}$ et supposons la fonction de valeur V du contrat de RV au moment t sur le domaine $(t, F, m) \in [0, T] \times O^-$:

$$V(t, F, m) = \sup_{\tau \in T_{[t, T]}} \mathbb{E}_{t, F, m}^Q \left[\underbrace{\tau - t p_{x+t} \psi(\tau, F_\tau) e^{-r(\tau-t)}}_{(a)} + \int_t^\tau \underbrace{s - t p_{x+t} \lambda_{x+s} \max(F_s, G_s) e^{-r(s-t)}}_{(b)} ds \right], \quad (2)$$

où

$$\psi(t, F_t) = \begin{cases} (1 - \kappa_t) F_t, & 0 \leq t < T, \\ \max(G_T, F_T), & t = T, \end{cases}$$

correspond à la valeur de rachat ou au versement à l'échéance du contrat de RV. À noter que dans l'équation (2), (a) contient les versements de rachat et d'échéance, tandis que (b) contient le paiement déclenché par le décès du titulaire de police. Supposons que

$$C_t = \{(F, m) \in O^- : V(t, F, m) > \psi(t, F)\}$$

est la région de continuation et

$$S_t = \{(F, m) \in O^- : V(t, F, m) = \psi(t, F)\}$$

est la région d'arrêt. Nous définissons également

$$\mathcal{L}V := (r - c\mathbb{1}_{\{F < \theta\}})FV_F + \frac{1}{2}\sigma^2 F^2 V_{FF} - (\lambda_{x+t} + r)V,$$

où V_t , V_F , et V_{FF} sont la dérivée de premier ordre de V relativement à t , F , et la dérivée de second ordre en ce qui concerne F , respectivement. Selon le principe de la programmation dynamique, la fonction de valeur V sur C_t est conforme à l'équation différentielle partielle (EDP)

$$V_t + LV + \lambda_{x+t} \max(F, G) = 0, \quad (3)$$

avec condition limite

$$\begin{cases} V(T, F, m) = \max(F, G_T), & \text{pour } (F, m) \in [0, m] \times [0, \infty), \\ V_t|_{F=0} = (\lambda_{x+t} + r)V|_{F=0} - \lambda_{x+t}G, & \text{pour } (t, m) \in [0, T) \times [0, \infty), \\ \frac{\partial V}{\partial m}|_{F=m} = \alpha \mathbb{1}_{\{F \geq \theta\}} \frac{\partial V}{\partial F}|_{F=m}, & \text{pour } (t, m) \in [0, T) \times [0, \infty), \\ \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{V(t, m, m)}{\psi(t, m)} = 1, & \text{pour } t \in [0, T) \end{cases} \quad (4)$$

La première condition limite dans l'équation (4) correspond au versement à l'échéance du contrat de RV. La deuxième condition limite correspond au cas où le compte de placement est épuisé, c'est-à-dire la dégénération de l'équation (3) lorsque $F = 0$. La troisième condition limite est intuitivement fondée sur la variation de la valeur du contrat de RV lorsque le compte de placement crée un nouveau FPC. On trouvera une condition semblable dans Goetzmann et coll. (2003), Lan et coll. (2013) et Panageas et Westerfield (2009). La dernière condition limite demeure, car il est optimal que le titulaire de police rachète le contrat pour d'importantes valeurs du compte de placement lorsque les FPC α sont positifs ($\alpha > 0$)⁴. Un théorème de vérification de l'EDP de tarification (3) avec conditions limites (4) est présenté au théorème 3 à l'annexe A.1.

Notons que les variables d'état F et m dans l'EDP (3) sont telles que $F \leq m$, ce qui n'est pas souhaitable pour résoudre numériquement l'EDP (3). Pour démêler la dépendance entre ces deux variables, nous considérons le changement de variable suivant :

$$z = z(F, m) = \frac{F}{m}$$

où $z \in [0, 1]$. De toute évidence, la variable d'état z représente une mesure de prélèvement⁵ du compte de placement par rapport à son point culminant. Définissons une fonction

$$J(t, z, u) = V(t, F, m).$$

et déduisons que

⁴ Veuillez noter que la STPC dégénère vers la structure de frais qui sont fonction de la conjoncture lorsque les FPC α deviennent nuls. Dans ce cas, il est optimal pour le titulaire de police de conserver le contrat de RV pour d'importantes valeurs de compte de placement comme le suggèrent MacKay et coll. (2017). Par conséquent, la dernière condition limite dans l'équation (4) devient $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{V(t, m, m)}{m} = 1$.

⁵ Le prélèvement est une sorte de mesure du risque qui évalue l'ampleur de la diminution de la valeur du portefeuille par rapport à son point culminant historique.

$$\begin{cases} V_t = J_t, \\ V_F = \frac{\partial J}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial F} + \frac{\partial J}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial F} = \frac{1}{m} J_z = \frac{1}{u} J_z, \\ V_{FF} = \frac{\partial V_F}{\partial F} = \frac{1}{u} \left(\frac{\partial J_z}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial F} + \frac{\partial J_z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial F} \right) = \frac{1}{u^2} J_{zz} + 0 = \frac{1}{u^2} J_{zz} \\ V_m = \frac{\partial V}{\partial m} = \frac{\partial J}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial m} + \frac{\partial J}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial m} = J_z \frac{-F}{m^2} + J_u = -\frac{z}{u} J_z + J_u, \end{cases}$$

il n'est pas difficile de voir que l'EDP (3) avec conditions limites (4) devient

$$J_t + LJ + \lambda_{x+t} \max(mz, G) = 0, \quad (5)$$

avec conditions limites

$$\begin{cases} J(T, z, m) = \max(zm, G), & \text{pour } (z, m) \in [0, 1] \times [0, \infty), \\ J_t|_{z=0} = (\lambda_{x+t} + r)J|_{z=0} - \lambda_{x+t}G, & \text{pour } (t, m) \in [0, T) \times [0, \infty), \\ \frac{\partial J}{\partial m}|_{z=1} = \frac{\alpha \mathbb{1}_{\{m > \theta\}} + 1}{m} \frac{\partial J}{\partial z}|_{z=1}, & \text{pour } (t, m) \in [0, T) \times [0, \infty), \\ \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{J(t, 1, m)}{\psi(t, m)} = 1, \quad f & \text{pour } t \in [0, T) \end{cases} \quad (6)$$

où $\mathcal{L}J = (r - c\mathbb{1}_{\{mz < \theta\}})zJ_z + \frac{1}{2}\sigma^2 z^2 J_{zz} - (\lambda_{x+t} + r)J$. Nous proposons de résoudre numériquement l'EDP ci-dessus (5) avec conditions limites (6) (plutôt qu'avec l'équation [3] avec conditions limites [4]).

3 Frais équitables et régions optimales de rachat

Dans la présente section, nous procédons à plusieurs expériences numériques sur la RV au moyen de la STPC afin de déterminer les frais d'assurance équitables et les régions de rachat optimales correspondantes pour un titulaire de police assujetti à la tarification risque-neutre. Nous effectuons une analyse comparative de RV identiques, mais avec les deux autres structures tarifaires présentées à la section 2.2. Nous comparons ensuite leurs régions de rachat optimales pour déterminer les répercussions de la gestion des risques pour l'assureur.

3.1 Les frais équitables

Pour un contrat de RV, des frais équitables permettent d'équilibrer parfaitement la VAA des entrées et des sorties de trésorerie. Plus précisément, nous présentons la définition suivante des frais d'assurance équitables pour les RV en vertu d'une structure tarifaire à point culminant.

Définition 1. *Dans le cas d'une RV assujettie à la structure tarifaire à point culminant, (c, α) est désignée « paire de frais équitables » si elle respecte l'équation*

$$V(0, F_0, F_0; c, \alpha) = F_0.$$

À des fins d'illustration, nous considérons le même modèle de mortalité de Makeham que dans MacKay et coll. (2017), c.-à-d.

$$\lambda_x = A + Bc^x, \text{ for } x > 0,$$

où $A = 0,0001$, $B = 0,00035$ et $c = 1,075$. Les autres éléments de paramètres sont précisés au tableau 1. Il convient de noter que nous évaluons la sensibilité des frais équitables en ce qui concerne les différentes durées des contrats T et les différents niveaux de volatilité du marché σ . Le seuil ϑ est fixé à 150 dans les exemples numériques suivants, mais d'autres valeurs auraient pu tout aussi bien être envisagées. Il existe diverses options pour choisir une fonction de pénalité de rachat (autre que celle indiquée au tableau 1). Contrairement à MacKay et coll. (2017), nous ne recherchons pas la pénalité de rachat minimale qui rend le comportement de rachat sous-optimal. Nous adoptons la même pénalité de rachat pour les trois structures tarifaires pour que les frais équitables et les régions de rachat en vertu de ces structures de frais puissent être comparés de façon équitable.

Tableau 1 : Éléments de paramètres

Description	Paramètre	Valeur
Durée du contrat	T	10 / 25
Taux d'intérêt	r	0,03
Taux de cumul	g	0
Prime initiale	F_0	
Pénalité de rachat	K_t	100 $0,05 \times (1 - \frac{t}{T})^3$
Âge du titulaire de police	x	60
Volatilité	σ	0,15 / 0,2 / 0,25
Seuil pour frais constants et FPC	ϑ	150

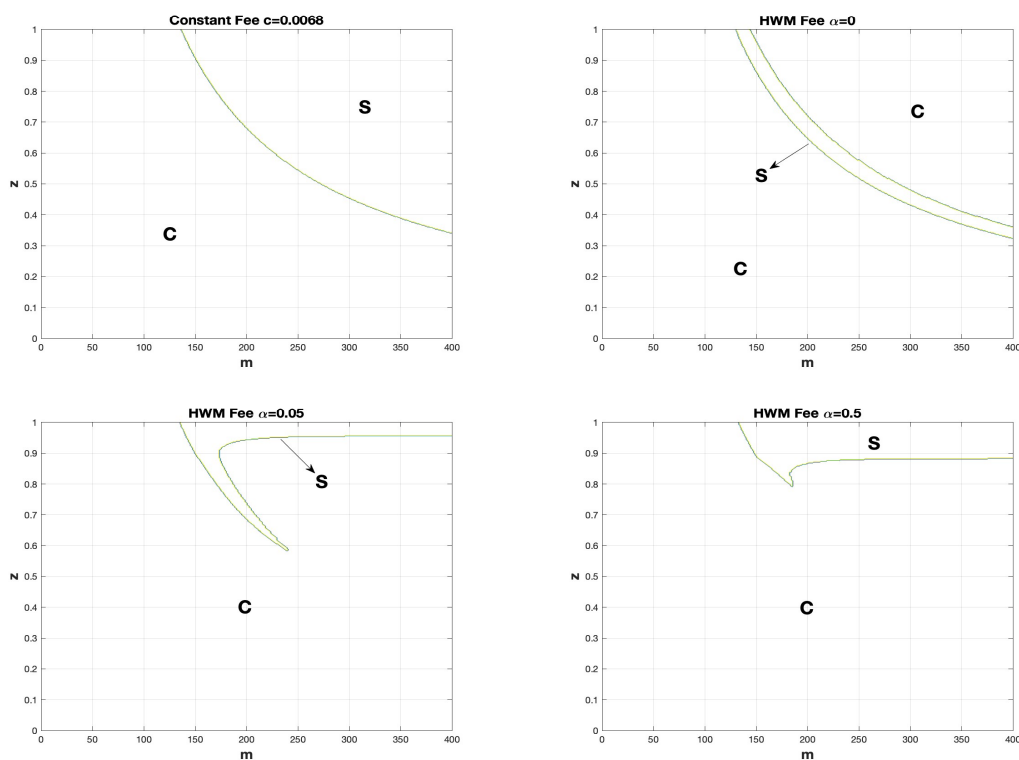
Tableau 2 : Frais équitables selon différentes structures tarifaires

Structure tarifaire	$T = 10$			$T = 25$		
	$\sigma = 0,15$	$\sigma = 0,2$	$\sigma = 0,25$	$\sigma = 0,15$	$\sigma = 0,2$	$\sigma = 0,25$
Constante c	0,0163	0,0332	0,0550	0,0068	0,0158	0,0278
	(0 0,0170)	(0 0,0338)	(0 0,0555)	(0 0,0087)	(0 0,0182)	(0 0,0307)
PC ($a; c$)	(0 05 0,0164)	(0,05 0,0333)	(0,05 0,0550)	(0,05 0,0069)	(0,05 0,0157)	(0,05 0,0277)
	(0,2 0,0162)	(0,2 0,0331)	(0,2 0,0547)	(0,2 0,0061)	(0,2 0,0148)	(0,2 0,0263)
	(0,5 0,0161)	(0,5 0,0329)	(0,5 0,0543)	(0,5 0,0056)	(0,5 0,0139)	(0,5 0,0247)

Le tableau 2 résume une liste des frais équitables selon différentes structures tarifaires. Dans ce qui suit, nous renvoyons au cas d'un FPC $\alpha = 0$ à la structure tarifaire qui est fonction de la conjoncture. Dans le tableau 2, nous considérons quatre niveaux de FPC, notamment 0, 0,05, 0,2, et 0,5, et nous calculons les frais constants correspondants c . Comme prévu, nous observons d'abord que, pour une échéance donnée T , les frais constants c diminuent à mesure qu'augmentent les frais α du modèle de FPC. Cela ressort immédiatement de la définition 1. Maintenant, en nous concentrant sur l'effet temps, nous constatons que, pour des FPC donnés α , les frais équitables constants c diminuent par rapport au cas $T = 10$ à $T = 25$. Cette constatation est intuitive, car la valeur de ces garanties tend à diminuer avec le temps. Enfin, pour les mêmes FPC α , une volatilité plus élevée correspond à des frais constants c plus élevés (toutes choses étant égales par ailleurs). Cela confirme notre intuition, à savoir qu'il faut majorer les frais pour financer les garanties dans des conditions de marché plus volatiles.

Figure 2 : Régions de rachat optimales sous différentes structures tarifaires

Nous présentons les régions de rachat optimal de la tarification risque-neutre en vertu des structures de tarifs constants, de tarifs qui sont fonction de la conjoncture et de FPC au temps $t = 12$.



*Cette figure est disponible en anglais seulement.

3.2 Régions de rachat optimal

Dans la présente sous-section, nous analysons plus en détail le comportement de rachat du titulaire de police assujetti à la tarification risque-neutre en décrivant les régions de rachat optimal correspondantes. À des fins de comparaison, nous présentons également les régions de rachat pour les structures de tarifs constants et de tarifs qui sont fonction de la conjoncture.

À la figure 2, nous présentons les régions de rachat optimal du s titulaire de police assujetti à la tarification risque-neutre au temps $t = 12$ en vertu de structures de tarification différentes pour l'exemple de la Section 3.1 avec contrat de durée $T = 25$ et la volatilité du marché $\sigma = 0,15$. Dans cette figure, « **S** » correspond à la région de rachat et « **C** » à la région de continuation. Le panneau supérieur gauche de la figure 2 représente la région de rachat optimal de la structure des frais constants. Il convient de noter que la région de rachat apparaît dans le coin supérieur droit du panneau, ce qui correspond aux grandes valeurs du compte de placement. Cela est conforme à l'observation antérieure selon laquelle les titulaires de police sont incités à racheter les RV lorsque le compte de placement devient important, car la valeur des garanties est faible comparativement à la VAA des frais d'assurance futurs. Le panneau supérieur droit de la figure 2 présente la région de rachat optimal sous le régime de frais qui sont fonction de la conjoncture ($\alpha = 0$), ce qui correspond à une zone en forme de bande sous le seuil ϑ (conforme à MacKay et coll., 2017).

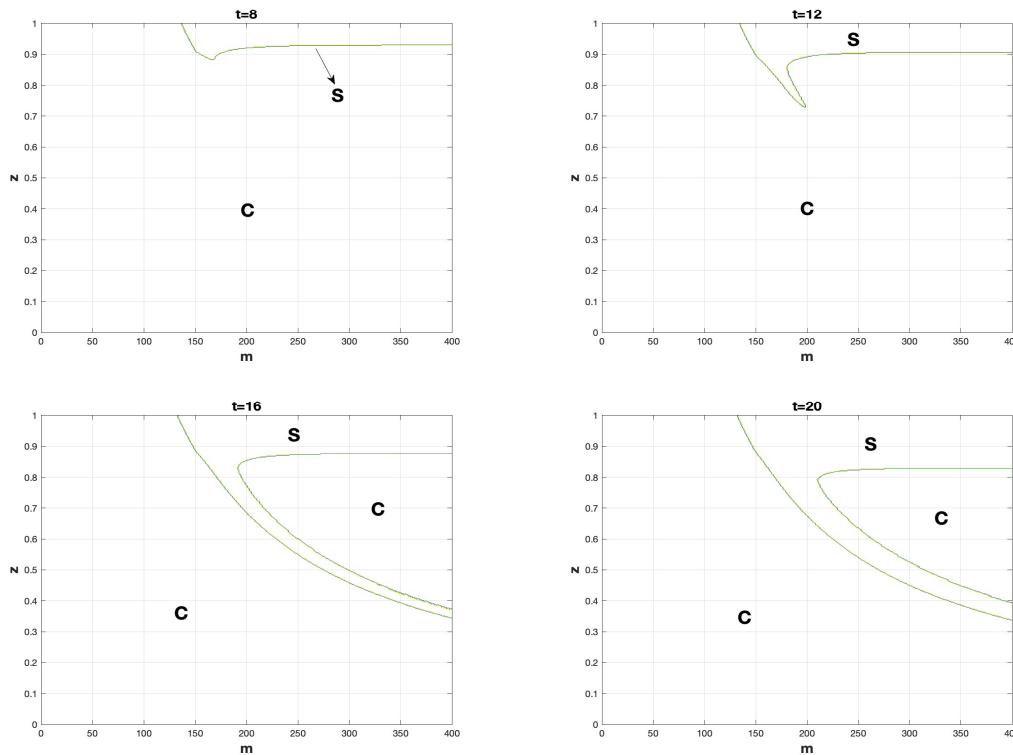
Lorsque le compte de placement se trouve dans la région en forme de bande, la situation est optimale pour que le titulaire de police rachète le contrat, car les frais d'assurance sont trop élevés pour la valeur des garanties intégrées. Au-delà du seuil ϑ , le titulaire de police n'a aucun avantage à racheter le contrat puisqu'aucuns frais d'assurance ne sont payés. Les deux panneaux inférieurs de la figure 2 présentent les régions de rachat de la structure tarifaire à point culminant avec FPC équivalant à $\alpha = 0,05$ (à gauche) et $0,5$ (à droite). Pour la structure tarifaire à point culminant, selon la conception inhérente, la région de rachat présente les caractéristiques à la fois de la structure de frais qui sont fonction de la conjoncture et la structure des FPC, soit une région en forme de bande sous ϑ et une région supérieure à ϑ au coin supérieur droit. La région en forme de bande représente la structure des frais qui sont fonction de la conjoncture, tandis que la région du coin supérieur droit porte sur la composante des FPC dans la structure tarifaire. Dans ce dernier cas, nous notons qu'il peut être optimal que le titulaire de police effectue le rachat lorsque la valeur du compte est élevée (au-delà du seuil ϑ) en raison du paiement possible des FPC α .

À partir de la figure 2, nous soulignons également les caractéristiques suivantes. Premièrement, des FPC α plus élevés (et, par conséquent, des frais constants c moins élevés) dissuadent le titulaire de police de racheter le contrat de RV lorsque la valeur du compte de placement est inférieure au seuil ϑ . Cette démarche est intuitive, car les frais d'assurance payés sont réduits et le titulaire de police est moins incité à racheter le contrat de RV. Cela explique l'affaissement graduel de la partie inférieure de la région de rachat en forme de bande à mesure qu'augmentent les FPC α . Deuxièmement, des FPC plus élevés incitent le titulaire de police à racheter le contrat lorsque la valeur du compte de placement est supérieure au seuil ϑ , car les frais sont plus élevés lorsque le compte de placement donne de bons résultats. Cela explique pourquoi la hausse des FPC α élargit les régions de rachat dans le coin supérieur droit des figures.

Enfin, à la figure 3, nous présentons les régions de rachat optimal aux temps $t = 8$, $t = 12$, $t = 16$ et $t = 20$ pour les FPC $\alpha = 0,2$ avec contrat de durée $T = 25$ et volatilité du marché $\sigma = 0,15$. Nous constatons que le titulaire de police est plus susceptible de racheter le contrat de RV qui se rapproche de l'échéance, ce qui est pris en compte dans l'élargissement des régions de rachat au fil du temps. La raison en est que le titulaire de police est moins patient, car la valeur des garanties intégrées est généralement moins élevée à l'approche de l'échéance (toutes choses étant égales par ailleurs).

Figure 3 : Régions de rachat optimal à différents moments

Dans cette figure, nous présentons les régions d'arrêt optimal pour les FPC $\alpha = 0,2$ à différents moments.



*Cette figure est disponible en anglais seulement.

4 Le titulaire de police novice (type 1)

Dans le reste du présent document, nous examinons l'incidence des RV avec structure tarifaire à point culminant visant un titulaire de police qui évalue son bien-être selon un critère de MV. À des fins de comparaison, nous tenons également compte du bien-être du titulaire de police en vertu des structures de frais constants et de frais qui sont fonction de la conjoncture. Plus précisément, nous supposons que le titulaire de police évalue le bien-être obtenu du contrat de RV en mesurant à la fois la moyenne et la variance du versement des RV. L'analyse de la MV est la pierre angulaire de la théorie moderne des portefeuilles. Dans ce cas, une variance relativement faible des versements de RV (par rapport à leur moyenne) est habituellement souhaitable, en particulier pour les investisseurs réfractaires au risque qui accordent davantage d'importance à la stabilité de leur placement.

Pour englober une gamme de comportements des titulaires de police, nous considérons les trois types de titulaires de police suivants : le titulaire de police novice (type 1), le titulaire de police novice avec chocs exogènes (type 2) et le titulaire de police avisé (type 3). Plus précisément, le type 1 correspond au titulaire de police qui ne rachète jamais le contrat, le type 2 correspond au titulaire de police qui rachète le contrat à un moment exponentiel indépendant (en raison, par exemple, de chocs exogènes), et le type 3 correspond à un titulaire de police qui rachète le contrat de façon optimale. Dans la présente section, nous nous concentrons sur l'évaluation du bien-être du titulaire de police de type 1. Le bien-être des titulaires de police de type 2 et de type 3 sera abordé séparément aux sections 5 et 6, respectivement. L'évaluation du bien-être du titulaire de police de type 1 est justifiée sur le fait que les RV sont des produits d'assurance-vie complexes reconnus pour nuire à la capacité des gens d'en mesurer les valeurs (voir Brown et coll., 2017). Les titulaires de police qui n'ont pas de connaissances suffisantes en matière de finances ou de marché peuvent ne pas comprendre suffisamment les RV pour exercer de façon optimale leurs droits de rachat. La renonciation à l'option de rachat du contrat (c.-à-d. le titulaire de police de type 1) est un genre de comportement extrême typique des titulaires de police novices (littératie financière et connaissance du marché insuffisantes). Ce comportement est également le reflet de l'observation empirique selon laquelle les titulaires de police exercent moins souvent leurs droits à l'égard des contrats de RV que ne le laisse supposer le comportement en matière de tarification risque-neutre.

Supposons que la dynamique du fonds de police sous-jacent d'après la mesure de probabilité physique P suit un mouvement brownien géométrique

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t$$

où W_t est un mouvement brownien d'après la mesure P . Comme il est mentionné ci-dessus, le titulaire de police de type 1 n'utilise pas l'option de rachat intégrée. En d'autres termes, le contrat se termine avec un paiement au décès ou à l'échéance. Nous supposons que le bien-être du titulaire de police de type 1 est quantifié par la fonction V de la valeur MV qui suit et qui pénalise la variance du versement des RV :

$$V(t, F, m) = \mathbb{E}_{t, F, m} \left[e^{-\zeta(\rho \wedge T)} \max(F_{\rho \wedge T}, G_{\rho \wedge T}) \right] - \frac{\gamma(F)}{2} \text{Var}_{t, F, m} \left[e^{-\zeta(\rho \wedge T)} \max(F_{\rho \wedge T}, G_{\rho \wedge T}) \right], \quad (7)$$

où $\gamma(\cdot)$ correspond à la fonction d'aversion pour le risque qui dépend de la conjoncture, ζ est le taux d'actualisation subjectif du titulaire de police, et ρ représente la durée de vie future du titulaire de police. Dans ce qui suit, nous adoptons une fonction d'aversion pour le risque qui dépend de la conjoncture, qui est semblable à Björk et coll. (2014), c'est-à-dire que

$$\gamma(F) = \frac{\gamma}{\max(F, G)}, \quad (8)$$

où γ est le niveau constant d'aversion pour le risque du titulaire de police. Contrairement à Björk et coll. (2014), le choix du dénominateur a pour but de s'adapter au contexte particulier des RV avec garanties intégrées. À noter que l'équation (7) peut être exprimée sous la forme

$$V(t, F, m) = \nu^1(t, F, m) - \frac{\gamma(F)}{2} \left[\nu^2(t, F, m) - (\nu^1(t, F, m))^2 \right]$$

où ν^1 et ν^2 correspondent respectivement au premier et au deuxième moments du versement des RV, c'est-à-dire

$$\nu^p(t, F, m) = \mathbb{E}_{t, F, m} \left[e^{-p\zeta(\rho \wedge T)} \max(F_{\rho \wedge T}, G_{\rho \wedge T})^p \right], \text{ pour } p = 1, 2.$$

Pour le titulaire de police de type 1, nous avons en outre

$$\nu^p(t, F, m) = \mathbb{E}_{t, F, m} \left[T-t p_{x+t} e^{-p\zeta(T-t)} \max(F_T, G_T)^p + \int_t^T s-t p_{x+t} \lambda_{x+s} \max(F_s, G_s)^p e^{-p\zeta(s-t)} ds \right],$$

pour $p = 1, 2$. Nous proposons de résoudre les VAA pour ν^1 et ν^2 afin d'obtenir V . Selon la formule de Feynman-Kac, pour que $(t, F, m) \in (0, T) \times \mathcal{O}$, ν^p ($p = 1, 2$) est conforme à

$$\frac{\partial \nu^p}{\partial t} + \mathcal{L} \nu^p + \lambda_{x+t} \max(F, G)^p = 0, \quad (9)$$

pour $\mathcal{L} \nu^p = (\mu - c \mathbb{1}_{\{F < \theta\}}) F (\nu^p)_F + \frac{1}{2} \sigma^2 F^2 (\nu^p)_{FF} - (\lambda_{x+t} + \zeta) \nu^p$, avec conditions limites

$$\begin{cases} \nu^p(T, F, m) = \max(F, G_T)^p, & \text{pour } (F, m) \in [0, m] \times [0, \infty), \\ \frac{\partial \nu^p}{\partial t} \Big|_{F=0} = (\lambda_{x+t} + \gamma) \nu^p \Big|_{F=0} - \lambda_{x+t} G^p, & \text{pour } (t, m) \in [0, T) \times [0, \infty), \\ \frac{\partial \nu^p}{\partial m} \Big|_{F=m} = \alpha \mathbb{1}_{\{F \geq \theta\}} \frac{\partial \nu^p}{\partial F} \Big|_{F=m}, & \text{pour } (t, m) \in [0, T) \times [0, \infty). \end{cases} \quad (10)$$

Dorénavant, nous exécuterons tous les exemples numériques avec $\mu = 8\%$, $\sigma = 0,15$, et $\zeta = 0,05$. Tous les autres paramètres sont conformes au tableau 1. Dans ce qui suit, la moyenne et la variance du versement des RV, ainsi que le bien-être du titulaire de police sont tous évalués au point $(t, F, m) = (0, F_0, F_0)$ et les frais équitables sont ceux indiqués au tableau 2.

Le tableau 3 résume la moyenne et la variance des paiements de RV, ainsi que le bien-être d'un titulaire de police novice (type 1) avec trois niveaux différents d'aversion pour le risque. Deux horizons temporels sont pris en compte, soit $T = 10$ et $T = 25$.

Tableau 3 : Bien-être du titulaire de police novice

Ce tableau résume la moyenne et la variance du versement de RV, ainsi que le bien-être du titulaire de police pour trois niveaux d'aversion pour le risque en vertu de structures tarifaires différentes. Deux horizons temporels sont envisagés ($T = 10$ et $T = 25$). Le bien-être est évalué par la fonction V de la valeur VM dans l'équation (7) au point $(t, F, m) = (0, F_0, F_0)$. La moyenne et le bien-être les plus élevés et la variance la plus faible sont exprimés en caractères gras.

$T = 10$					
Structure tarifaire	$E_{t,F,m}[\cdot]$	$Var_{t,F,m}[\cdot]$	Bien-être $\gamma = 0,6$	Bien-être $\gamma = 1,2$	Bien-être $\gamma = 1,8$
Constante	114,83	3479,10	104,39	93,95	83,51
FPC $\alpha = 0$	121,21	4732,30	107,01	92,81	78,62
FPC $\alpha = 0,05$	118,94	4110,10	106,61	94,28	81,95
FPC $\alpha = 0,2$	112,93	2856,60	104,36	95,79	87,22
FPC $\alpha = 0,5$	105,40	1700,10	100,30	95,20	90,10
$T = 25$					
Constante	140,27	9595,10	111,48	82,69	53,91
FPC $\alpha = 0$	147,79	11475,00	113,37	78,94	44,52
FPC $\alpha = 0,05$	142,77	9829,20	113,29	83,80	54,31
FPC $\alpha = 0,2$	127,98	6185,00	109,43	90,87	72,32
FPC $\alpha = 0,5$	109,75	2856,90	101,74	92,60	84,03

Nous considérons la structure tarifaire à point culminant avec les FPC α allant de 0 à 0,5, où le cas $\alpha = 0$ correspond à la structure de tarifs qui sont fonction de la conjoncture. Par souci d'exhaustivité, les résultats pour la structure de frais constants sont également inclus.

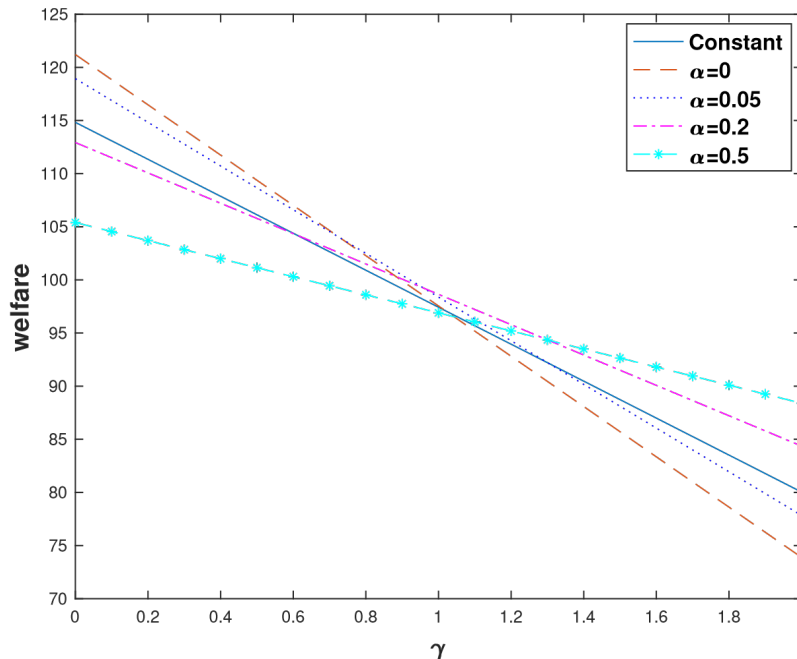
Quelques points méritent d'être mentionnés. Tout d'abord, nous observons que la réduction de la variance du versement de RV s'accompagne d'une réduction de sa moyenne lorsqu'augmentent les FPC α . En effet, à mesure que les FPC α augmentent (et que les frais constants c diminuent), des frais d'assurance moindres (respectivement plus) sont facturés lorsque le compte de placement est faible (respectivement élevé), ce qui indique que le compte de placement est moins susceptible d'atteindre des valeurs extrêmes élevées ou faibles.

Deuxièmement, on peut constater que la structure tarifaire à point culminant accroît le bien-être d'un titulaire de police novice dans certains cas. Plus précisément, cette structure profite aux titulaires de police novices qui sont suffisamment réfractaires au risque. En ce qui concerne le faible niveau d'aversion pour le risque ($\gamma = 0,6$), nous pouvons constater, à partir du tableau 3, que le bien-être du titulaire de police est le plus élevé sous la structure des tarifs qui sont fonction de la conjoncture. Cependant, pour un niveau légèrement plus élevé d'aversion pour le risque ($\gamma = 1,2$ ou $1,8$), le bien-être du titulaire de police est le plus élevé en vertu de la structure tarifaire à point culminant, avec des FPC de $\alpha = 0,2$ et $0,5$, respectivement⁶. Cela peut s'expliquer par le fait que les titulaires de police ayant différents niveaux d'aversion pour le risque affichent des attitudes différentes à l'égard du risque, mesurées par la variance des versements de RV. Plus précisément, les titulaires de police davantage réfractaires au risque s'efforcent de réduire la variance des versements de RV même si cette réduction s'accompagne d'une baisse des versements prévus (à mesure qu'augmente le bien-être global des titulaires de police).

⁶ L'augmentation du bien-être du titulaire de police n'est pas toujours monotone dans α . À preuve, une exception lorsque $T = 10$ et que $\gamma = 1,2$, où le bien-être du titulaire de police atteint un sommet lorsque les FPC se situent à $\alpha = 0,2$ et diminue légèrement lorsqu'augmente α . Néanmoins, cela ne contredit pas la conclusion selon laquelle la structure tarifaire à point culminant profite aux titulaires de police novices qui sont plus réfractaires au risque.

Figure 4 : Bien-être du titulaire de police novice selon différentes formes d'aversion pour le risque

Cette figure illustre le bien-être d'un titulaire de police novice (type 1) à différents niveaux d'aversion pour le risque selon différentes structures tarifaires.



*Cette figure est disponible en anglais seulement.

Pour examiner plus en détail l'incidence du niveau d'aversion pour le risque, nous illustrons à la figure 4 le bien-être du titulaire de police novice pour une gamme de niveaux d'aversion pour le risque d'un horizon temporel $T = 10$. Nous considérons les cinq structures tarifaires analysées ci-dessus. Nous constatons que le bien-être du titulaire de police de type 1 est moins sensible au niveau d'aversion pour le risque γ pour des FPC α plus élevés. Cette situation s'explique par le fait qu'une augmentation des FPC α correspond à une plus faible variance des versements de RV et, par conséquent, génère une tendance à la baisse plus aplatie du bien-être des titulaires de police lorsqu'augmente le niveau d'aversion pour le risque γ . Nous pouvons donc conclure que la structure tarifaire à point culminant contribue à stabiliser le bien-être d'un groupe de titulaires de police novices au titre de différents niveaux d'aversion pour le risque γ . En d'autres termes, la structure tarifaire à point culminant est plus robuste pour un groupe de titulaires de police novices ayant divers niveaux d'aversion au risque que les structures de frais constants et de frais qui sont fonction de la conjoncture. Cette caractéristique rend les RV plus négociables, car elle réduit l'inégalité du bien-être entre les titulaires de police novices ayant différentes préférences en matière de risque.

5 Le titulaire de police novice avec chocs exogènes (type 2)

Dans la présente section, nous poursuivons avec l'analyse du bien-être d'un titulaire de police novice avec chocs exogènes (type 2). Encore une fois, les résultats pour les structures de frais constants et de frais qui sont fonction de la conjoncture sont également fournis à des fins de comparaison. Comme nous l'avons déjà mentionné, un titulaire de police novice peut rejeter complètement l'option de rachat intégrée au contrat de RV en raison d'un manque de connaissances financières ou de connaissances du marché. Néanmoins, le titulaire de police peut subir certains chocs dans sa vie qui pourraient déclencher le rachat du contrat pour avoir accès aux liquidités. Ces chocs sont normalement exogènes pour les marchés financiers, à savoir exogènes sur le rendement du compte de placement. Par conséquent, pour modéliser le comportement des titulaires de police de type 2, nous supposons que le moment de survenance τ d'un certain choc exogène suit une loi exponentielle avec moyenne $\frac{1}{\eta}$, peu importe la durée de vie future du titulaire de police ρ ainsi que le compte de placement $\{F_t\}_{t \in [0, T]}$. Nous supposons que le titulaire de police rachète le contrat à la survenance du choc.

Il convient de souligner que le contrat de RV prévoit le versement d'une prestation de rachat ou de décès, ou d'une prestation à l'échéance. Par conséquent, comme à la section 4, le bien-être du titulaire de police de type 2 est quantifié par la fonction V de la VM définie comme suit :

$$V(t, F, m) = \mathbb{E}_{t, F, m} \left[e^{-\zeta(\tau \wedge \rho \wedge T)} H(F_{\tau \wedge \rho \wedge T}) \right] - \frac{\gamma(F)}{2} \text{Var}_{t, F, m} \left[e^{-\zeta(\tau \wedge \rho \wedge T)} H(F_{\tau \wedge \rho \wedge T}) \right], \quad (11)$$

où

$$H(F_{\tau \wedge \rho \wedge T}) = \begin{cases} (1 - \kappa_\tau) F_\tau, & \tau < \rho \wedge T, \\ \max(G_\rho, F_\rho), & \rho < \tau \wedge T, \\ \max(G_T, F_T), & T < \tau \wedge \rho, \end{cases} \quad (12)$$

correspond aux versements contractuels. Comme auparavant, nous utilisons les premier et deuxième moments du versement des RV, v^1 et v^2 pour faciliter la quantification du bien-être des titulaires de police de type 2. Les expressions du premier et du deuxième moments v^1 et v^2 du versement des RV sont présentées dans la proposition suivante.

Proposition 1. *Pour le titulaire de police de type 2 qui rachète le contrat à la suite d'une loi exponentielle indépendante au taux $\eta > 0$, les premier et deuxième moments du versement des RV sont respectivement donnés par*

$$v^p(t, F, m) = \mathbb{E}_{t, F, m} \left[e^{-\int_t^T \delta_s^p ds} \max(F_T, G_T)^p + \int_t^T e^{-\int_t^s \delta_u^p du} (\eta [(1 - \kappa_s) F_s]^p + \lambda_{x+s} \max(F_s, G_s)^p) ds \right]$$

où $\delta_t^p = \rho\zeta + \lambda_{x+t} + \eta$ for $p=1,2$.

La démonstration de la proposition 1 est effectuée à l'annexe A.2. À l'aide de la formule de Feynman-Kac, nous pouvons calculer les EDP pour v^1 et v^2 dans ce qui suit. Pour $(t, F, m) \in (0, T) \times \mathbb{O}$, v^p ($p = 1, 2$) est conforme à

$$\frac{\partial v^p}{\partial t} + \mathcal{L}v^p + \eta[(1 - \kappa_t)F]^p + \lambda_{x+t} \max(F, G)^p = 0, \quad (13)$$

avec conditions limites

$$\begin{cases} \nu^p(T, F, m) = \max(F, G_T)^p, & \text{for } (F, m) \in [0, m] \times [0, \infty), \\ \frac{\partial \nu^p}{\partial t} \Big|_{F=0} = \delta^p \nu^p \Big|_{F=0} - \lambda_{x+t} G^p, & \text{for } (t, m) \in [0, T) \times [0, \infty), \\ \frac{\partial \nu^p}{\partial m} \Big|_{F=m} = \alpha \mathbb{1}_{\{F \geq \theta\}} \frac{\partial \nu^p}{\partial F} \Big|_{F=m}, & \text{for } (t, m) \in [0, T) \times [0, \infty), \end{cases} \quad (14)$$

où

$$\mathcal{L}\nu^p = (\mu - c \mathbb{1}_{\{F < \theta\}}) F (\nu^p)_F + \frac{1}{2} \sigma^2 F^2 (\nu^p)_{FF} - \delta^p \nu^p, \text{ et } \delta p = \delta t p.$$

Les tableaux 4 et 5 résument la moyenne et la variance du versement des RV et le bien-être correspondant à divers niveaux d'aversion pour le risque γ pour une RV avec horizon temporel $T = 10$ et $T = 25$, respectivement. Les résultats sont fournis pour les mêmes structures tarifaires que celles envisagées à la section 4. Le temps de rachat pour le titulaire de police suit une loi exponentielle indépendante à intensité de rachat $\eta = 0,1, 1$ ou 10 . Il convient de noter que le cas hypothétique $\eta = 0$ se résume au titulaire de police de type 1 de la section 4. Nous résumons les observations des tableaux 4 et 5 ci-dessous.

Premièrement, comme prévu, nous constatons que la moyenne et la variance du versement des RV diminuent généralement en ce qui concerne l'intensité du rachat η . Il s'agit là d'une conséquence immédiate du fait que le versement de la RV est généralement effectué plus tôt, probablement à la suite d'un rachat dont le versement est réduit par une lourde pénalité de rachat.

Deuxièmement, pour une faible intensité de rachat η (p. ex., $\eta = 0,1$ ou 1), comme à la section 4, la moyenne et la variance du versement de la RV sont réduites lorsque les FPC α augmentent. Cependant, pour une forte intensité de rachat η (p. ex., $\eta = 10$), cette réduction de la moyenne ne tient plus lorsque les FPC α augmentent. Cela s'explique par le fait que le titulaire de police dont l'intensité de rachat est importante est plus susceptible de racheter le contrat et, si c'est le cas à un moment précoce, cela rend plus difficile l'entrée en vigueur des FPC α .

Troisièmement, la structure tarifaire à point culminant est avantageuse pour les titulaires de police qui ont une forte probabilité de subir certains chocs exogènes pendant la durée du contrat. Pour une forte intensité de rachat ($\eta = 10$), le bien-être le plus élevé apparaît à des FPC $\alpha = 0,5$ pour les trois niveaux d'aversion pour le risque γ et les deux horizons temporels $T = 10$ et $T = 25$. Enfin, le bien-être du titulaire de police de type 2 en vertu des intensités de rachat $\eta = 0,1$ et $\eta = 1$ est comparable à celui des titulaires de police de type 1 en ce sens que les FPC sont favorables aux titulaires de police de type 2 qui sont plus réfractaires au risque ($\gamma = 1,2$, ou $1,8$), tandis que la structure des tarifs qui sont fonction de la conjoncture est favorable aux titulaires de police de type 2 qui sont moins réfractaires au risque ($\gamma = 0,6$). Cela ressort du bien-être le plus élevé et de la tendance du bien-être des titulaires de police lorsque l'on augmente les FPC α en vertu des deux intensités de rachat $\eta = 0,1$ ou $\eta = 1$.

Comme nous l'avons mentionné à la section 4, nous avons l'intention d'examiner le bien-être d'un groupe de titulaires de police de type 2 affichant une vaste gamme de niveaux d'aversion pour le risque. Nous renvoyons le lecteur à la figure 5, qui décrit le bien-être du titulaire de police de type 2 comme une fonction du niveau d'aversion pour le risque pour différentes structures tarifaires lorsque les RV ont une échéance de $T = 10$. À la figure 5, l'intensité du rachat a été choisie comme étant $\eta = 0,1$.

Tableau 4 : Bien-être du titulaire de police novice avec chocs exogènes

Ce tableau résume la moyenne et la variance du versement de la RV et du bien-être pour un titulaire de police de type 2 selon différentes structures tarifaires pour l'horizon temporel $T = 10$. Le bien-être est évalué par la fonction V de la MV dans l'équation (11) au point de départ $(t, F, m) = (0, F_0, F_0)$. La moyenne et le bien-être les plus élevés et la variance la plus faible sont exprimés en caractères gras.

$T = 10$					
Fee Structure	$E_{t,F,m}[\cdot]$	$Var_{t,F,m}[\cdot]$	Welfare $\gamma = 0.6$	Welfare $\gamma = 1.2$	Welfare $\gamma = 1.8$
Constant	108.1601	2260.80	101.3777	94.5953	87.8129
$\eta = 0.1$					
$\alpha = 0$	111.4847	2944.50	102.6512	93.8177	84.9842
$\alpha = 0.05$	110.2841	2602.90	102.4754	94.6667	86.8580
$\alpha = 0.2$	106.9499	1902.00	101.2439	95.5379	89.8319
$\alpha = 0.5$	102.7070	1238.20	98.9924	95.2778	91.5632
Constant	97.7186	380.7885	96.5762	95.4339	94.2915
$\eta = 1$					
$\alpha = 0$	97.7757	398.0850	96.5814	95.3872	94.1929
$\alpha = 0.05$	97.7610	387.0364	96.5999	95.4388	94.2777
$\alpha = 0.2$	97.6067	360.1458	96.5256	95.4451	94.3647
$\alpha = 0.5$	97.3858	328.2719	96.4010	95.4162	94.4314
Constant	95.2953	59.1446	95.1179	94.9404	94.7630
$\eta = 10$					
$\alpha = 0$	95.2889	59.1227	95.1115	95.9342	94.7568
$\alpha = 0.05$	95.2944	59.1142	95.1171	94.9397	94.7624
$\alpha = 0.2$	95.2952	59.0206	95.1181	94.9411	94.7640
$\alpha = 0.5$	95.2948	58.8727	95.1182	94.9416	94.7649

*Ce tableau est disponible en anglais seulement.

Tableau 5 : Bien-être du titulaire de police novice avec chocs exogènes

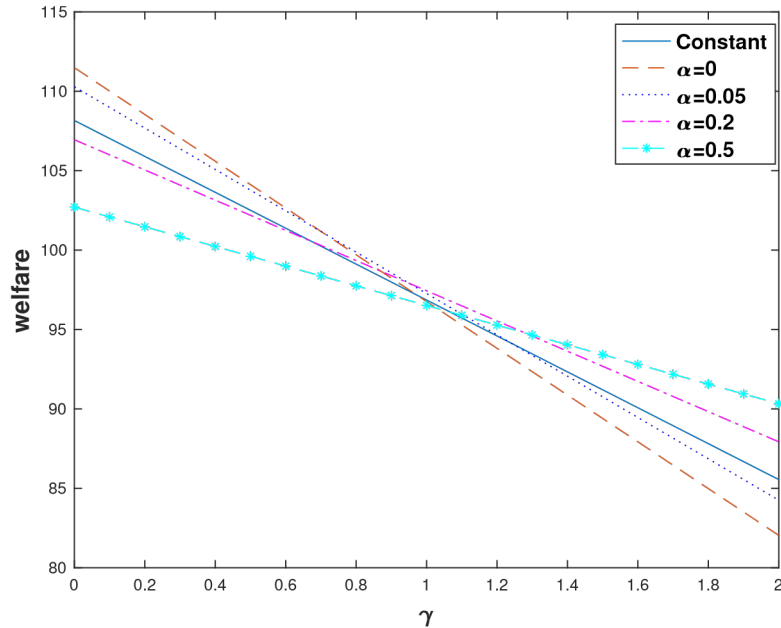
Ce tableau résume la moyenne et la variance du versement de la RV et du bien-être pour un titulaire de police de type 2 selon différentes structures tarifaires pour l'horizon temporel $T = 25$. Le bien-être est évalué par la fonction V de la MV dans l'équation (11) au point $(t, F, m) = (0, F_0, F_0)$. La moyenne et le bien-être les plus élevés et la variance la plus faible sont exprimés en caractères gras.

$T = 25$						
Fee Structure	$E_{t,F,m}[\cdot]$	$Var_{t,F,m}[\cdot]$	Welfare $\gamma = 0.6$	Welfare $\gamma = 1.2$	Welfare $\gamma = 1.8$	
Constant	116.6123	4099.10	104.3150	92.0177	79.7204	
$\eta = 0.1$	$\alpha = 0$	118.7506	4787.90	104.3869	90.0232	75.6595
	$\alpha = 0.05$	117.1704	4131.60	104.7756	92.3808	79.9860
	$\alpha = 0.2$	111.8027	2737.40	103.5905	95.3783	87.1661
	$\alpha = 0.5$	105.0219	1513.40	100.4817	95.9415	91.4013
	Constant	97.9733	394.2303	96.7906	95.6079	94.4252
$\eta = 1$	$\alpha = 0$	97.8606	399.7407	96.6614	95.4622	94.2629
	$\alpha = 0.05$	97.9512	390.0008	96.7812	95.6112	94.4412
	$\alpha = 0.2$	97.8376	362.6018	96.7498	95.6620	94.5742
	$\alpha = 0.5$	97.6322	329.5321	96.6436	95.6550	94.6664
$\eta = 10$	Constant	95.2986	59.6349	95.1197	94.9408	94.7619
	$\alpha = 0$	95.2809	59.5007	95.1024	94.9239	94.7454
	$\alpha = 0.05$	95.2981	59.6034	95.1193	94.9405	94.7617
	$\alpha = 0.2$	95.3049	59.5314	95.1263	94.9477	94.7691
	$\alpha = 0.5$	95.3083	59.4198	95.1300	94.9518	94.7735

*Ce tableau est disponible en anglais seulement.

Figure 5 : Bien-être des titulaires de police novices avec chocs exogènes pour divers niveaux d'aversion pour le risque

Cette figure illustre le bien-être des titulaires de police novices avec chocs exogènes (type 2) pour divers niveaux d'aversion pour le risque selon différentes structures tarifaires.



*Cette figure est disponible en anglais seulement.

Conformément au cas du titulaire de police de type 1, la figure 5 indique que la structure tarifaire à point culminant est plus robuste et donc plus négociable pour un groupe de titulaires de police de type 2 dont les préférences en matière de risque sont hétérogènes comparativement aux deux autres structures tarifaires. Comme à la figure 4, des FPC α plus élevés correspondent à une ligne de bien-être plus aplatie qui reflète le bien-être des titulaires de police de type 2 moins sensibles à un changement du niveau d'aversion pour le risque γ .

6 Le titulaire de police avisé (type 3)

Dans la présente section, nous examinons le bien-être d'un titulaire de police avisé (type 3) pour les RV assorties d'une structure tarifaire à point culminant. Encore une fois, les résultats correspondants pour les structures de frais constants et de frais qui sont fonction de la conjoncture sont également présentés.

Le type 3 correspond aux titulaires de police qui rachètent le contrat de façon optimale selon leurs préférences et qui modélisent donc leur comportement d'après une littérature financière et une connaissance du marché adéquates. Nous formulons le bien-être du titulaire de police en un problème d'arrêt optimal de la VM stochastique en vertu d'une aversion pour le risque qui est fonction de la conjoncture (comme dans Björk et coll., 2014). L'une des grandes subtilités du problème d'optimisation de la MV stochastique est le concept bien connu d'incohérence temporelle (voir p. ex. Basak et Chabakauri, 2010; Björk et Murgoci, 2014; et Björk et coll., 2017). Pour y remédier, nous adoptons l'approche fondée sur la théorie des jeux proposée par Björk et Murgoci (2010) et nous établissons une stratégie d'arrêt d'équilibre pour le titulaires de police en résolvant un système d'équations EHJB. Nous soulignons que le problème actuel de MV est différent des problèmes existants dans la documentation en ce qui concerne les aspects suivants.

Premièrement, nous sommes aux prises avec un problème d'arrêt optimal selon la MV qui diffère des problèmes de contrôle optimal selon la MV. Pour appliquer le cadre théorique des jeux dans Björk et Murgoci (2010), nous transformons le problème d'arrêt optimal en problème de contrôle optimal avec un contrôle binaire.

Deuxièmement, en raison de la conception inhérente du contrat de RV assorti d'une STPC, nous résolvons un problème d'arrêt optimal selon la MV à l'aide de deux variables d'état sur un horizon aléatoire. Le niveau de complexité du problème de grande dimension est en outre attribuable à l'aversion pour le risque qui est fonction de la conjoncture, ce qui entraînera l'introduction d'une autre variable d'état. En outre, l'examen d'un horizon aléatoire complique davantage le calcul du système des équations EHJB.

À défaut de solution explicite de la fonction de valeur, nous recourons à la résolution numérique du système d'équations EHJB correspondant au problème d'arrêt optimal selon la MV. Nous élaborons un algorithme fondé sur Wang et Forsyth (2011), adapté pour résoudre les problèmes de contrôle optimal de la MV. Cet algorithme réduit sensiblement la complexité de la résolution numérique directe du système d'équations EHJB en contournant certaines complications découlant de la grande dimension du problème et de sa procédure numérique itérative. En outre, nous établissons le lien entre l'algorithme et le système des équations EHJB en démontrant que l'algorithme est effectivement une approximation numérique du système des équations EHJB.

6.1 Formulation du modèle

Notons que le titulaire de police avisé (type 3) décide de façon optimale du moment du rachat pour maximiser l'objectif de MV avec une aversion pour le risque qui est fonction de la conjoncture. Par conséquent, la fonction de valeur qui quantifie le bien-être du titulaire de police est

$$V(t, F, m) = \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{[t, T]}} \left\{ \mathbb{E}_{t, F, m} \left[H(F_{\tau \wedge \rho}) \middle| \rho > t \right] - \frac{\gamma(F)}{2} \text{Var}_{t, F, m} \left[H(F_{\tau \wedge \rho}) \middle| \rho > t \right] \right\} \quad (15)$$

pour $(t, F, m) \in [0, T] \times \mathcal{O}^-$, où H correspond au versement des RV défini dans l'équation (12), $\mathbb{T}_{[t, T]}$ désigne l'ensemble de tous les temps d'arrêt τ évalués dans $[t, T]$, et la fonction d'aversion pour le risque $\gamma(F)$ est formulée dans l'équation (8). Il convient de noter qu'un problème d'arrêt optimal stochastique peut être perçu comme un problème de contrôle optimal avec des contrôles binaires (voir p. ex. Ebert et coll., 2018; et Tan et coll., 2018). Par conséquent, nous pouvons entrevoir notre problème d'arrêt optimal comme un problème de contrôle optimal en introduisant la règle d'arrêt suivante.

Définition 2. Une règle d'arrêt est une fonction mesurable $u : [0, T] \times \mathcal{O} \rightarrow \{0, 1\}$ où 0 correspond à la continuation et 1 représente l'arrêt.

Plus précisément, dans notre configuration, les éléments de continuation et d'arrêt au moment $t \in [0, T)$ sont définis comme étant

$$\begin{cases} \mathcal{C}_t = \{(F, m) \in \bar{\mathcal{O}} : u(t, F, m) = 0\} \\ \mathcal{S}_t = \{(F, m) \in \bar{\mathcal{O}} : u(t, F, m) = 1\}, \end{cases}$$

avec le temps d'arrêt correspondant τ^u défini comme

$$\tau^u = \inf\{s \geq t : u(s, F_s, M_s) = 1\}.$$

Compte tenu de ce qui précède, l'équation (15) est réécrite en la forme

$$V(t, F, m) = \sup_{u \in \mathcal{A}} \left\{ \mathbb{E}_{t, F, m} \left[H(F_{\tau^u \wedge \rho}) \mid \rho > t \right] - \frac{\gamma(F)}{2} \text{Var}_{t, F, m} \left[H(F_{\tau^u \wedge \rho}) \mid \rho > t \right] \right\} := \sup_{u \in \mathcal{A}} \mathcal{J}(t, F, m; \tau^u), \quad (16)$$

où \mathcal{A} est l'ensemble admissible de règles d'arrêt. Comme nous l'avons vu précédemment, la nature du problème d'optimisation stochastique de la MV donne lieu à l'incohérence temporelle de la stratégie optimale. Comme c'est souvent le cas dans la documentation (voir p. ex. Björk et Murgoci, 2010), nous proposons de surmonter le problème de l'incohérence temporelle en cherchant une stratégie d'équilibre dans le cadre théorique des jeux. Selon la définition d'une stratégie d'équilibre à horizon aléatoire dans Landriault et coll. (2018), nous présentons ici la définition d'une règle d'arrêt d'équilibre à horizon aléatoire pour le problème qui nous intéresse.

Définition 3. Pour un point fixe $(t, F, m) \in [0, T) \times \mathcal{O}^-$, un petit $\varepsilon > 0$, et une règle d'arrêt admissible $\hat{u} = \{\hat{u}_s\}_{s \in [t, T)}$ conditionnelle à $\rho > t$, définissons une règle d'arrêt u^ε par

$$u^\varepsilon(s, y, z) = \begin{cases} u \in \{0, 1\}, & \text{for } t \leq s < (t + \varepsilon) \wedge \rho, \\ \hat{u}(s, y, z), & \text{for } (t + \varepsilon) \wedge \rho \leq s < T \wedge \rho, \end{cases}$$

dans laquelle $(y, z) \in [0, m] \times [0, \infty)$. Si

$$\liminf_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{\mathcal{J}(t, F, m; \tau^{\hat{u}}) - \mathcal{J}(t, F, m; \tau^{u^\varepsilon})}{\varepsilon} \geq 0$$

pour tous $(t, F, m) \in [0, T) \times \mathcal{O}^-$, puis la valeur \hat{u} est appelée règle d'arrêt de rétroaction d'équilibre et la fonction de valeur d'équilibre correspondante V est donnée par $V(t, F, m) = \mathcal{J}(t, F, m; \tau^{\hat{u}})$.

Dans ce qui suit, nous présentons un théorème de vérification qui justifie qu'une solution d'un système d'équations EHJB soit une solution du problème d'optimisation (16). La démonstration du théorème est abordée à l'annexe A.3.

Théorème 1. *Supposons qu'il existe des fonctions $V, g \in C^{1,2,1}([0, T] \times \mathcal{O}^-)$, $f \in C^{1,2,1,2}([0, T] \times \mathcal{O}^- \times [0, m])$ et une règle d'arrêt \hat{u} qui respecte les conditions suivantes :*

- Pour tous $(t, F, m) \in [0, T] \times \mathcal{O}^-$, V résout

$$\min \left\{ -V_t - (\mu - c\mathbb{1}_{\{F \leq \theta\}}) F \left(V_F - f_y - \frac{\gamma_F}{2} g^2 \right) - \frac{1}{2} \sigma^2 F^2 \left(V_{FF} - f_{yy} - 2f_{Fy} - \frac{\gamma_{FF}}{2} g^2 - \gamma(F) g_F^2 - 2\gamma_F g g_F \right) + \frac{\lambda_{x+t} \gamma(F)}{2} (g - \max(F, G))^2 + \lambda_{x+t} V - \lambda_{x+t} \max(F, G), V - \psi \right\} = 0, \quad (17)$$

avec conditions limites

$$\begin{cases} V(T, F, m) = \max(F, G), & \text{for } (F, m) \in \mathcal{O}, \\ V_t|_{F=0} = \frac{\lambda_{x+t} \gamma(0)}{2} (g|_{F=0} - G)^2 + \lambda_{x+t} V|_{F=0} - \lambda_{x+t} G, & \text{for } (t, m) \in [0, T] \times [0, \infty), \\ V_m|_{F=m} = \alpha \mathbb{1}_{\{F \geq \theta\}} (V_F|_{F=m} - f_y|_{F=m} - \frac{\gamma_F}{2} g^2|_{F=m}), & \text{for } (t, m) \in [0, T] \times [0, \infty), \\ \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{V(t, m, m)}{\psi(t, m)} = 1, & \text{for } t \in [0, T]. \end{cases} \quad (18)$$

- Pour tous $(t, F, m) \in [0, T] \times \mathcal{O}^-$,

$$\hat{u}(t, F, m) = \begin{cases} 1, & \text{if } V(t, F, m) = \psi(t, F), \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (19)$$

- Pour l'équation fixe $y \in [0, m]$ et pour tous $(t, F, m) \in [0, T] \times \mathcal{O}^-$ s.t. $\hat{u} = 0$, f résout

$$f_t + (\mu - c\mathbb{1}_{\{F \leq \theta\}}) F f_F + \frac{1}{2} \sigma^2 F^2 f_{FF} - \lambda_{x+t} f + \lambda_{x+t} \left[\max(F, G) - \frac{\gamma(y)}{2} \max(F, G)^2 \right] = 0, \quad (20)$$

avec conditions limites

$$\begin{cases} f(T, F, m, y) = \max(F, G) - \frac{\gamma(y)}{2} \max(F, G)^2, & \text{for } (F, m, y) \in \mathcal{O} \times [0, m], \\ f_t|_{F=0} = \lambda_{x+t} f|_{F=0} - \lambda_{x+t} \left(G - \frac{\gamma(y)}{2} G^2 \right), & \text{for } (t, m, y) \in [0, T] \times [0, \infty) \times [0, m], \\ f_m|_{F=m} = \alpha \mathbb{1}_{\{F \geq \theta\}} f_F|_{F=m}, & \text{for } (t, m, y) \in [0, T] \times [0, \infty) \times [0, m], \\ \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{f(t, m, m, y)}{\psi(t, m) - \frac{\gamma(y)}{2} \psi^2(t, m)} = 1, & \text{for } t \in [0, T]. \end{cases} \quad (21)$$

Et pour $\hat{u} = 1$, $f(t, F, m, y) = \psi(t, F) - \frac{\gamma(y)}{2} \psi^2(t, F)$.

- Pour tous $(t, F, m) \in [0, T] \times \mathcal{O}^-$ s.t. $\hat{u} = 0$, g résout

$$g_t + (\mu - c\mathbb{1}_{\{F \leq \theta\}}) F g_F + \frac{1}{2} \sigma^2 F^2 g_{SFF} - \lambda_{x+t} g + \lambda_{x+t} \max(F, G) = 0, \quad (22)$$

avec conditions limites

$$\begin{cases} g(T, F, m) = \max(F, G), & \text{for } (F, m) \in \bar{O}, \\ g_t|_{F=0} = \lambda_{x+t}g|_{F=0} - \lambda_{x+t}G, & \text{for } (t, m) \in [0, T] \times [0, \infty), \\ g_m|_{F=m} = \alpha \mathbf{1}_{\{F \geq \theta\}} g_F|_{F=m}, & \text{for } (t, m) \in [0, T] \times [0, \infty), \\ \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{g(t, m, m)}{\psi(t, m)} = 1, & \text{for } t \in [0, T]. \end{cases} \quad (23)$$

Et pour $\hat{u} = 1$, $g(t, F, m) = \psi(t, F)$.

Alors \hat{u} est une règle d'arrêt d'équilibre telle que

$$\begin{cases} V(t, F, m) = \mathcal{J}(t, F, m; \tau^{\hat{u}}) \\ g(t, F, m) = \mathbb{E}_{t, F, m} [H(F_{\tau^{\hat{u}} \wedge \rho}) | \rho > t] \\ f(t, F, m, y) = \mathbb{E}_{t, F, m} [H(F_{\tau^{\hat{u}} \wedge \rho}) | \rho > t] - \frac{\gamma(y)}{2} \mathbb{E}_{t, F, m} [H(F_{\tau^{\hat{u}} \wedge \rho})^2 | \rho > t]. \end{cases} \quad (24)$$

Ce système d'équations EHJB correspond à un problème de limite libre de grande dimension avec trois fonctions inconnues, V , f , et g , où $\hat{u} = 0$ correspond à la région de continuation et $\hat{u} = 1$, à la région d'arrêt.

6.2 L'algorithme

Compte tenu de la nature complexe du système d'équations EHJB (17)-(23), nous proposons de le résoudre numériquement en élaborant un algorithme. Inspiré des travaux de Wang et Forsyth (2011) sur l'élaboration d'un algorithme pour les problèmes de contrôle optimal de la MV, l'algorithme proposé contournera la complexité découlant de la résolution directe du système des équations EHJB (17)-(23) correspondant à notre problème d'arrêt optimal de la MV. De plus, nous allons plus loin que Wang et Forsyth (2011) en établissant un lien entre le système des équations EHJB (17)-(23) et l'algorithme.

La résolution numérique directe du système des équations EHJB (17)-(23) au moyen d'une méthode par différence finie comporte à peu près les étapes suivantes :

1. Fractionner $[0, T]$ en N intervalles égaux s.t. $\Delta t = \frac{T}{N}$ et $t_n = T - n\Delta t$ pour $n = 0, 1, \dots, N$.
2. Au temps t_n , résoudre g numériquement au moyen de l'équation (22) avec des conditions limites (23) et résoudre f numériquement pour chaque $y \in [0, m]$ fixe au moyen de l'équation (20) avec conditions limites (21), en supposant que $\hat{u} = 0$ (aucun rachat) pour les domaines $[0, m] \times [0, \infty)$.
3. Substituer les valeurs f et g qui en résultent dans l'équation (17) et résoudre V numériquement à l'aide de l'équation (17) avec conditions limites (18) pour obtenir une règle d'arrêt d'équilibre \hat{u} (ou, de façon équivalente, une région qui stoppe l'équilibre).
4. Mettre à jour f et g pour que leurs valeurs correspondent à la règle d'arrêt d'équilibre \hat{u} . Plus précisément, si $\hat{u}(t_n, F, m) = 0$, ne pas modifier $f(t_n, F, m, y)$ et $g(t_n, F, m)$; si $\hat{u}(t_n, F, m) = 1$, laisser $f(t_n, F, m, y) = \psi(t_n, F) - \frac{\gamma(F)}{2} \psi^2(t, F)$ et $g(t_n, F, m) = \psi(t_n, F)$.

5. Remplacer les valeurs f et g à jour dans l'équation (17) pour mettre à jour V .
6. Reprendre les étapes 4 et 5 jusqu'à ce que V converge.
7. Passer au temps t_{n+1} et reprendre les étapes 2 à 6.

La résolution numérique du système d'équations EHJB (17)-(23) à l'aide des étapes ci-dessus comporte trois défis. Premièrement, la résolution de f est chronophage, car il s'agit de résoudre une fonction inconnue avec deux variables d'état pour chaque variable fixe $y \in [0, m]$. Deuxièmement, la forme complexe de l'équation (17) rend le processus de calcul très non négligeable. Troisièmement, à chaque point t_n , dans le temps, une longue procédure itérative est nécessaire pour résoudre V et déterminer une règle d'arrêt d'équilibre \hat{u} .

Compte tenu de ce qui précède, nous élaborons un algorithme fondé sur Wang et Forsyth (2011) pour contourner la complexité de la résolution numérique directe du système des équations EHJB (17)-(23). Comme aux sections 4 et 5, la moyenne et la variance de la fonction de versement des RV H peut être représentée par ses premier et deuxième moments. Par conséquent, la fonction de valeur V dans l'équation (16) peut être réécrite en la forme

$$V(t, F, m) = \sup_{u \in \mathcal{A}} \left\{ \nu^1(t, F, m; \tau^u) - \frac{\gamma(F)}{2} \left[\nu^2(t, F, m; \tau^u) - (\nu^1(t, F, m; \tau^u))^2 \right] \right\}, \quad (25)$$

où

$$\nu^p(t, F, m; \tau^u) = \mathbb{E}_{t, F, m} \left[H^p(F_{\tau^u \wedge \rho}) \mid \rho > t \right], \quad \text{for } p = 1, 2, \quad (26)$$

représente les premier et deuxième moments de la fonction de versement des RV H sous une certaine règle d'arrêt pour $u \in \mathcal{A}$, respectivement. De plus, à partir de l'équation (24), nous observons que les fonctions de valeur V , f et g sont toutes des combinaisons linéaires de ν^1 et ν^2 en vertu d'une règle d'arrêt d'équilibre. Nous observons aussi que sur le domaine $[0, T] \times O^-$ s.t. $\hat{u} = 0$, ν^p ($p = 1, 2$) est conforme à l'équation (9) avec les conditions limites (10) avec $\zeta = 0$. Par conséquent, au lieu de résoudre numériquement le système des équations EHJB (17)-(23) directement, on peut établir ν^1 et ν^2 en résolvant leurs EDP correspondantes pour obtenir une règle d'arrêt d'équilibre. Nous divisons cette procédure en plusieurs étapes :

Étape 1 : Au moment t_n , résoudre ν^p ($p = 1, 2$) numériquement en utilisant l'équation (9) avec les conditions limites de l'équation (10) avec $\zeta = 0$, en supposant que $u = 0$ (aucun rachat) sur le domaine O^- .

Étape 2 : Obtenir une règle d'arrêt d'équilibre \hat{u} en remplaçant les valeurs ν^1 et ν^2 dans l'équation (25).

Étape 3 : Mettre à jour ν^1 et ν^2 s.t., si $\hat{u}(t_n, F, m) = 0$, ne pas modifier $\nu^1(t_n, F, m)$ et $\nu^2(t_n, F, m)$; si $\hat{u}(t_n, F, m) = 1$, soit $\nu^1(t_n, F, m) = \psi(t_n, F)$ et $\nu^2(t_n, F, m) = \psi^2(t_n, F)$.

Étape 4 : Passer au moment t_{n+1} et répéter les **étapes 1 à 3**.

Cette procédure itérative permet de contourner plusieurs problèmes découlant de la résolution directe du système des équations EHJB (17)-(23). Plus précisément, nous ne traitons plus de la grande dimensionnalité de la fonction f , et la procédure itérative à chaque point dans le temps t_n a été éliminée. En outre, la détermination d'une règle d'arrêt d'équilibre \hat{u} à partir de

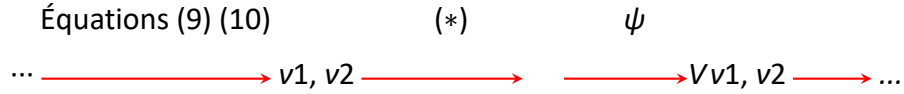
l'équation (25) est beaucoup plus simple que la résolution de l'équation (17). Cependant, puisque nous contournons directement la résolution du système des équations EHJB (17)-(23) en réglant v^1 et v^2 (par l'entremise de leur EDP), nous devons établir qu'une règle d'arrêt d'équilibre produite en exécutant les **étapes 1 à 4** est la même que la règle d'arrêt d'équilibre résultant de la solution du système d'équations EHJB (17)-(23). Le théorème qui suit établit cette équivalence.

Théorème 2. Soit \hat{u} une règle d'arrêt d'équilibre résultant du système d'équations EHJB (17)-(23). Pour tous $(t, F, m) \in [0, T] \times O^-$ s.t. $\hat{u} = 0$, supposons que v^p ($p = 1, 2$) est conforme à l'équation (9) avec conditions limites (10) avec $\zeta = 0$. Pour tous $(t, F, m) \in [0, T] \times O^-$ s.t. $\hat{u} = 1$, supposons que $v^1(t, F, m) = \psi(t, F)$ et $v^2(t, F, m) = \psi^2(t, F)$. Dans ce cas,

$$\begin{cases} V(t, F, m) := \nu^1(t, F, m; \tau^{\hat{u}}) - \frac{\gamma(F)}{2} \left[\nu^2(t, F, m; \tau^{\hat{u}}) - (\nu^1(t, F, m; \tau^{\hat{u}}))^2 \right] \\ f(t, F, m, y) := \nu^1(t, F, m; \tau^{\hat{u}}) - \frac{\gamma(F)}{2} \nu^2(t, F, m; \tau^{\hat{u}}) \\ g(t, F, m) := \nu^1(t, F, m; \tau^{\hat{u}}) \end{cases} \quad (27)$$

est conforme au système des équations EHJB (17)-(23).

La démonstration du théorème 2 est abordée à l'annexe A.4. À l'établissement du théorème 2, nous pouvons déterminer numériquement une règle d'arrêt d'équilibre en exécutant les **étapes 1 à 4**. Voici un schéma algorithmique détaillé.



Diviser $[0, T]$ en N intervalles de temps égaux de sorte que $\Delta^t = \frac{T}{N}$ et $t_n = T - n\Delta t$ pour $n = 0, 1, \dots, N$. Diviser $[0, 1]$ en K intervalles égaux de sorte que $\Delta^z = \frac{1}{K}$ et $z_i = i\Delta z$ pour $i = 0, 1, \dots, K$. Tronquer le domaine de m à m_{\max} et diviser $[0, m_{\max}]$ en M intervalles égaux de sorte que $\Delta^m = \frac{m_{\max}}{M}$ et $m_j = j\Delta m$ pour $j = 0, 1, \dots, M$. Définir $V_{i,j}^n := V(t_n, z_i, m_j)$, $(v_u^1)^n_{i,j} := \nu^1(t_n, z_i, m_j; \tau^u)$, $(v_u^2)^n_{i,j} := \nu^2(t_n, z_i, m_j; \tau^u)$, et $\psi_{i,j}^n := \psi(t_n, z_i, m_j)$ pour $n = 1, \dots, N$, $i = 0, \dots, K$, $j = 0, \dots, M$, et $u \in \{0, 1\}$. De plus, si $u = 1$, nous avons $(v_u^1)^n_{i,j} = (v_1^1)^n_{i,j} = \psi_{i,j}^n$ et $(v_u^2)^n_{i,j} = (v_1^2)^n_{i,j} = (\psi_{i,j}^n)^2$.

Algorithme 1 Règle d'arrêt d'équilibre

Figure 6 : Diagramme illustrant la propagation de la procédure pour l'algorithme 1

La figure 6 présente un diagramme qui décrit la propagation des procédures pour mieux illustrer l'algorithme 1.

- 1: Set $V_{i,j}^0 = z_i m_j \vee G$, $(\nu^1)_{i,j}^0 = z_i m_j \vee G$, and $(\nu^2)_{i,j}^0 = (z_i m_j \vee G)^2$ for $i = 0, \dots, K$ and $j = 0, \dots, M$.
- 2: for $n = 0, \dots, N - 1$ do
- 3: Obtain $(\nu_0^1)_{i,j}^{n+1}$ and $(\nu_0^2)_{i,j}^{n+1}$ for $i = 0, \dots, K$ and $j = 0, \dots, M$ using finite difference method to solve Eq. (9) and (10) with $\zeta = 0$ and $p = 1, 2$ for ν^1 and ν^2 , respectively.
- 4: Determine \hat{u} by $V_{i,j}^{n+1} = \max_{u \in \{0,1\}} \left[(\nu_u^1)_{i,j}^{n+1} - \frac{\gamma(z_i m_j \vee G)}{2} ((\nu_u^2)_{i,j}^{n+1} - ((\nu_u^1)_{i,j}^{n+1})^2) \right]$ (*).
- 5: if $\hat{u} = 0$ then
- 6: $(\nu_{\hat{u}}^1)_{i,j}^{n+1} = (\nu_0^1)_{i,j}^{n+1}$ and $(\nu_{\hat{u}}^2)_{i,j}^{n+1} = (\nu_0^2)_{i,j}^{n+1}$
- 7: else
- 8: $(\nu_{\hat{u}}^1)_{i,j}^{n+1} = \psi_{i,j}^{n+1}$ and $(\nu_{\hat{u}}^2)_{i,j}^{n+1} = (\psi_{i,j}^{n+1})^2$.
- 9: end if
- 10: end for

*Cette figure est disponible en anglais seulement.

6.3 Expériences numériques

Dans ce qui suit, nous procédons à certaines analyses numériques du bien-être d'un titulaire de police avisé (de type 3) dans le cadre de la structure tarifaire à point culminant. Par souci d'exhaustivité, nous présentons également les régions de rachat optimal du titulaire de police. À des fins de comparaison, les régions de bien-être et de rachat optimal du titulaire de police de type 3 en vertu des structures de frais constants et de frais qui sont fonction de la conjoncture sont également présentées.

Le tableau 6 résume le bien-être du titulaire de police avisé (type 3) selon différents niveaux d'aversion pour le risque pour les horizons temporels $T = 10$ et $T = 25$. Conformément aux résultats pour les titulaires de police de type 1 et de type 2, la structure tarifaire à point culminant peut accroître le bien-être d'un titulaire de police de type 3. Plus précisément, cette structure profite aux titulaires de police de type 3 qui sont plus réfractaires au risque (avec niveaux d'aversion pour le risque de $\gamma = 1,2$ et $1,8$). Toutefois, pour un titulaire de police de type 3 moins réfractaire au risque, la structure tarifaire qui est fonction de la conjoncture est favorable parmi les structures tarifaires envisagées. Nous constatons également que la structure tarifaire à point culminant est plus avantageuse pour un titulaire de police de type 3 lorsque le contrat de RV affiche une échéance plus courte.

Tableau 6 : Bien-être du titulaire de police avisé

Ce tableau résume le bien-être des titulaires de police avisés à l'aide de trois niveaux d'aversion pour le risque sur deux horizons temporels en vertu de différentes structures tarifaires. Le bien-être est évalué par la fonction V de la valeur VM dans l'équation (15) au point $(t, F, m) = (0, F_0, F_0)$. Le niveau de bien-être le plus élevé est mis en évidence avec des caractères gras.

Structure tarifaire	T = 10			T = 25		
	$\gamma = 0,6$	$\gamma = 1,2$	$\gamma = 1,8$	$\gamma = 0,6$	$\gamma = 1,2$	$\gamma = 1,8$
Constante	155,71	137,34	118,99	204,31	166,69	129,13
$\alpha = 0$	159.66	137.49	115.34	206.79	167.75	128.77
$\alpha = 0.05$	158.67	138.03	117.40	206.19	168.08	130.01
$\alpha = 0.2$	154.99	138.42	121.88	199.78	164.21	128.68
$\alpha = 0.5$	149.33	138.47	127.71	188.32	158.33	128.39

Cette observation correspond également à celle d'un titulaire de police de type 2 avec forte intensité de rachat ($\eta = 10$). En effet, pour $T = 10$, la hausse des frais à point culminant α augmente également le bien-être des titulaires de police de type 3 pour les valeurs $\gamma = 1,2$ et $1,8$, tandis que pour $T = 25$, le bien-être du titulaire de police semble culminer plus tôt, car le niveau de bien-être ultime est atteint au moyen d'un frais à point culminant $\alpha = 0,05$ parmi l'ensemble des structures tarifaires envisagées.

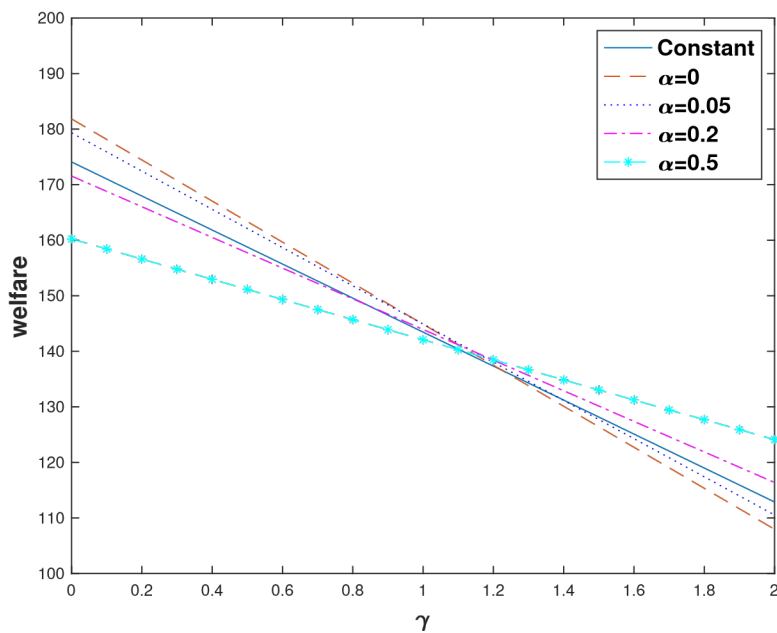
À l'instar de l'analyse aux sections 4 et 5, nous examinons la sensibilité du bien-être d'un groupe de titulaires de police de type 3 en ce qui concerne le niveau d'aversion pour le risque γ . La figure 7 illustre la valeur du bien-être d'un titulaire de police avisé pour un ensemble de niveaux différents d'aversion pour le risque en vertu de structures tarifaires différentes lorsque $T = 10$. Comme le montre cette figure, les résultats sont conformes à ceux des figures 4 et 5. Nous constatons qu'une augmentation des FPC α se traduit par un bien-être de type 3 moins sensible (ligne de bien-être plus aplatie) en ce qui concerne le niveau d'aversion pour le risque γ . Par conséquent, nous pouvons également conclure que la structure tarifaire à point culminant est plus robuste et donc plus négociable pour un groupe de titulaires de police de type 3 partageant des préférences hétérogènes au titre du risque.

Par souci d'exhaustivité, nous examinons le comportement optimal d'un titulaire de police de type 3 en matière de rachat en vertu de la structure tarifaire à point culminant. À des fins de comparaison, le comportement du titulaire de police en matière de rachat en vertu des structures de frais constants et de frais qui sont fonction de la conjoncture est également inclus. Pour l'analyse qui suit, nous supposons que $T = 25$ et $\gamma = 1,8$. La figure 8 présente les régions de rachat optimal d'un titulaire de police avisé (type 3) en vertu de structures tarifaires différentes au

moment $t = 12$. Il convient de souligner que nous présentons une version élargie des régions de rachat original, puisque celles-ci sont très petites. Quelques observations sont dignes de mention. Tout d'abord, comparativement aux régions de rachat d'un titulaire de police assujéti à une tarification risque-neutre, les régions de rachat d'un titulaire de police de type 3 sont considérablement réduites aux termes de toutes les structures tarifaires. Comme nous l'avons déjà mentionné, il y a discordance entre le comportement empirique du titulaire de police et le comportement au titre de la tarification risque-neutre.

Figure 7 : Le bien-être des titulaires de police avisés selon différentes aversions pour le risque

Cette figure illustre le changement du bien-être des titulaires de police avisés selon différents niveaux d'aversion pour le risque en vertu de structures tarifaires différentes.



*Cette figure est disponible en anglais seulement.

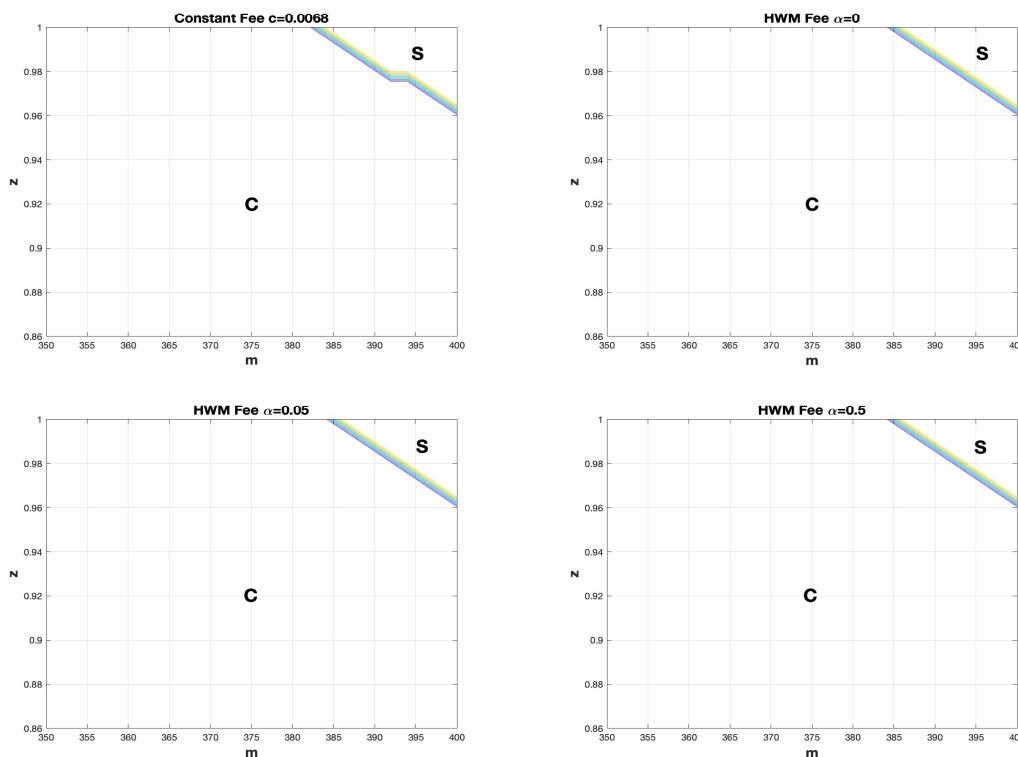
Plus précisément, les titulaires de police exercent leurs droits de rachat beaucoup moins souvent que ne le suggère le comportement au titre de la tarification risque-neutre. Bien que ce phénomène de marché puisse s'expliquer par le comportement sous-optimal des titulaires de police ou par les frictions de marché (voir Moenig et Bauer, 2015), nous estimons que le comportement des titulaires de police correspond plus étroitement à celui d'un titulaire de police qui maximise la MV.

Deuxièmement, les régions de rachat optimal de la figure 8 sont situées dans le coin supérieur droit de chaque panneau. Cette observation indique que le comportement du titulaire de police de type 3 au chapitre du rachat est certainement différent de celui d'un titulaire de police au titre de la tarification à risque-neutre, en particulier en vertu des structures de FPC et de frais qui sont fonction de la conjoncture, dont les régions de rachat optimal, comme on l'a vu plus haut, comportent habituellement une zone en forme de bande lorsque le compte de placement est inférieur au seuil ϑ .

Enfin, pour un titulaire de police de type 3, la différence entre les régions de rachat selon différentes structures tarifaires est quelque peu négligeable. En d'autres termes, l'évolution des structures tarifaires a peu d'incidence sur le comportement d'un titulaire de police avisé assujéti à une stratégie de maximisation de la MV pour ce qui est du rachat. Cela met en évidence un avantage de la stratégie de maximisation de la MV pour l'assureur, c'est-à-dire que si les titulaires de police suivent une stratégie de maximisation de la MV, l'assureur ne devrait pas prévoir de changements importants dans le comportement des titulaires de police selon différentes structures tarifaires qui devraient simplifier les activités de gestion des risques de l'assureur liées à un vaste portefeuille de RV.

Figure 8 : Régions de rachat optimal pour un titulaire de police avisé

Cette figure présente la région de rachat optimale d'un titulaire de police avisé (type 3) au moment $t = 12$. Les régions de rachat présentées constituent une version élargie des régions de rachat originales.



*Cette figure est disponible en anglais seulement.

7 Conclusion

Dans le présent document, nous introduisons une nouvelle structure tarifaire à point culminant, nous en montrons les avantages pour contrôler la variance du versement des RV en stabilisant le compte de placement, et nous discutons de ses répercussions du point de vue de l'assureur et du titulaire de police.

En vertu du cadre conventionnel de tarification risque-neutre, pour trouver une paire de frais équitables pour les RV, nous effectuons ensuite une analyse exhaustive du bien-être d'un titulaire de police dont la préférence pour le risque est quantifiée par une stratégie de MV. Entre autres avantages, il a été démontré que les RV assujetties à la nouvelle structure tarifaire à point culminant peuvent, dans certains cas, aider le titulaire de police à obtenir un niveau de bien-être plus élevé.

Les recherches futures devraient porter sur l'incidence de la structure tarifaire à point culminant en vertu de diverses garanties, par exemple les prestations du type retrait, ou selon plusieurs modèles de marché, comme le modèle de volatilité stochastique.

En outre, il pourrait être intéressant d'examiner la couverture dynamique d'un contrat de RV en vertu de la structure tarifaire à point culminant.

Remerciements

Les auteurs tiennent à souligner l'aide reçue sous forme de subvention de recherche de l'Institut canadien des actuaires (numéro de subvention CS000185). David Landriault et Bin Li (numéros de subvention 341316 et 05828, respectivement) remercient le Conseil de recherches en sciences naturelles et en génie du Canada de leur soutien. David Landriault adresse des remerciements pour l'aide reçue aux termes du Programme des chaires de recherche du Canada.

Bibliographie

Aase, Knut K, et Svein-Arne Persson. « Pricing of unit-linked life insurance policies ». *Scandinavian Actuarial Journal*, vol. 1, 1994, pp. 26-52.

Azimzadeh, Parsiad, Forsyth, Peter A., et Kenneth R Vetzal. « Hedging costs for variable annuities under regime-switching ». *Hidden Markov Models in Finance*, Springer, 2014, pp. 133 à 166.

Basak, Suleyman, et Georgy Chabakauri. « Dynamic mean-variance asset allocation ». *The Review of Financial Studies*, vol. 23, n° 8, 2010, pp. 2970-3016.

Bauer, Daniel, Kling, Alexander, et Jochen Russ. « A universal pricing framework for guaranteed minimum benefits in variable annuities ». *Le Bulletin ASTIN : Le Journal de l'AAI*, vol. 38, n° 2, 2008, pp. 621-651.

Bauer, Daniel, Gao, Jin, Moenig, Thorsten, Ulm, Eric R., et Nan Zhu. « Policyholder exercise behavior in life insurance: The state of affairs ». *North American Actuarial Journal*, 2017, pp. 1-17.

Bernard, Carole, et Thorsten Moenig. « Where less is more: Reducing variable annuity fees to benefit policyholder and insurer ». *Journal of Risk and Insurance*, 2017.

Bernard, Carole, Hardy, Mary et Anne MacKay. « State-dependent fees for variable annuity guarantees ». *Le Bulletin ASTIN : Le Journal de l'AAI*, vol. 44, n° 3, 2014, pp. 559-585.

Bernard, Carole, Kolkiewicz, Adam et Junsen Tang. *Variable annuities with fees tied to vix*. Document de travail disponible sur <https://egrie2016.ucy.ac.cy/Wp-content/uploads/2016/09/16Bernard2016-06-13preliminary.pdf>, 2016.

Björk, Tomas et Agatha Murgoci. *A general theory of markovian time-inconsistent stochastic control problems*. Disponible à SSRN 1694759, 2010.

Björk, Tomas et Agatha Murgoci. « A theory of markovian time-inconsistent stochastic control in discrete time ». *Finance et Stochastics*, , vol 18, n° 3, 2014, pp. 545-592.

Björk, Tomas, Murgoci, Agatha et Xun Yu Zhou. « Mean–variance portfolio optimization with statedependent risk aversion ». *Mathematical Finance: An International Journal of Mathematics, Statistics and Financial Economics*, vol. 24, n° 1, 2014, pp. 1-24.

Björk, Tomas, Khapko, Mariana et Agatha Murgoci. « On time-inconsistent stochastic control in continuous time ». *Finance and Stochastics*, vol. 21, n° 2, 2017, pp. 331-360.

Brown, Jeffrey R., Kapteyn, Arie, Luttmer, Erzo FP, Mitchell, Olivia S., et Anya Samek. *Behavioral impediments to valuing annuities: Evidence on the effects of complexity and choice bracketing. Technical Report*. National Bureau of Economic Research, 2017.

Cui, Zhenyu, Feng, Runhuan et Anne MacKay. « Variable annuities with vix-linked fee structure under a heston-type stochastic volatility model ». *North American Actuarial Journal*, vol. 21, n° 3, 2017, pp. 458-483.

Dai, Min, Kwok, Yue Kuen et Jianping Zong. « Guaranteed minimum withdrawal benefit in variable annuities ». *Mathematical Finance*, vol. 18, n° 4, 2008, pp. 595-611.

Ebert, Sebastian, Wei Wei et Xun Yu Zhou. « Discounting, diversity, and investment ». *Diversity, and Investment*, 9 février 2018.

- Forsyth, Peter et Kenneth Vetzal. « An optimal stochastic control framework for determining the cost of hedging of variable annuities ». *Journal of Economic Dynamics and Control*, vol. 44, 2014, pp. 29-53.
- Goetzmann, William N., Ingersoll, Jonathan E. Jr. et Stephen A. Ross. « High-water marks and hedge fund management contracts ». *The Journal of Finance*, vol. 58, n° 4, 2003, pp. 1685-1718.
- Guasoni, Paolo et Jan. Obl o j. « The incentives of hedge fund fees and high-water marks ». *Mathematical Finance*, vol. 26, n° 2, 2016, pp. 269-295.
- Huang, Yao Tung et Yue Kuen Kwok. « Regression-based monte carlo methods for stochastic control models: Variable annuities with lifelong guarantees ». *Quantitative Finance*, vol. 16, n° 6, 2016, pp. 905-928.
- Lan, Yingcong, Wang, Neng et Jinqiang Yang. « The economics of hedge funds ». *Journal of Financial Economics*, vol. 110, n° 2, 2013, pp. 300-323.
- Landriault, David, Li, Bin, Li, Danping et Virginia R. Young. « Equilibrium strategies for the mean-variance investment problem over a random horizon ». *SIAM Journal on Financial Mathematics*, vol. 9, n° 3, 2018, pp. 1046-1073.
- Mackay, Anne, Augustyniak, Maciej, Bernard, Carole et Mary R. Hardy. « Risk management of policyholder behavior in equity-linked life insurance ». *Journal of Risk and Insurance*, vol. 84, n° 2, 2017, pp. 661-690.
- Harry Markowitz. « Portfolio selection ». *The Journal of Finance*, vol. 7, n° 1, 1952, pp. 77-91.
- Milevsky, Moshe A. et Thomas S. Salisbury. « The real option to lapse a variable annuity: Can surrender charges complete the market ». *Conference Proceedings of the 11th Annual International AFIR Colloquium*, volume 1, 2001.
- Milevsky, Moshe A. et Thomas S. Salisbury. « Financial valuation of guaranteed minimum withdrawal benefits ». *Insurance: Mathematics and Economics*, vol. 38, n° 1, 2006, pp. 21-38.
- Milevsky, Moshe A. et Tom S. Salisbury. *The real option to lapse and the valuation of death-protected investments*. 2002
- Moenig, Thorsten et Daniel Bauer. « Revisiting the risk-neutral approach to optimal policyholder behavior: A study of withdrawal guarantees in variable annuities ». *Review of Finance*, vol. 20, n° 2, 2015, pp. 759–794.
- Møller, Thomas. « Risk-minimizing hedging strategies for unit-linked life insurance contracts ». *Bulletin ASTIN : Le Journal de l'AAI*, vol. 28, n° 1, 1998, pp. 17-47.
- Panageas, Stavros et Mark M. Westerfield. « High-water marks: High risk appetites? convex compensation, long horizons, and portfolio choice ». *The Journal of Finance*, vol. 64, n° 1, 2009, pp. 1-36.
- Steinorth, Petra et Olivia S. Mitchell. « Valuing variable annuities with guaranteed minimum lifetime withdrawal benefits ». *Insurance: Mathematics and Economics*, vol. 64, 2015, pp. 246-258.

Tan, Ken Seng, Wei Wei et Xun Yu Zhou. « Failure of smooth pasting principle and nonexistence of equilibrium stopping rules under time-inconsistency ». *arXiv preprint arXiv:1807.01785*, 2018.

Wang, Jian et Peter A. Forsyth. « Continuous time mean variance asset allocation: A time-consistent strategy ». *European Journal of Operational Research*, vol. 209, n° 2, 2011, pp. 184-201.

Zhou, Xun Yu et Duan Li. « Continuous-time mean-variance portfolio selection: A stochastic LQ framework ». *Applied Mathematics and Optimization*, vol. 42, n° 1, 2000, pp. 19-33.

A Quelques démonstrations

A.1 Théorème de vérification pour l'EDP de tarification

La section 2.4 présente l'EDP de tarification (3) avec conditions limites (4). À noter que l'équation (3) correspond à l'EDP que la fonction de valeur est conforme à la région de continuation C_t . Dans la région $[0, T] \times O^-$, la fonction de valeur est conforme à l'inégalité variationnelle suivante

$$\min\{-V_t - LV - \lambda_{x+t} \max\{F, G\}, V - \psi\} = 0. \quad (28)$$

Nous démontrons le théorème de vérification suivant pour l'équation (28) avec conditions limites (4).

Théorème 3. *Supposons qu'il existe une fonction $v \in C^{1,2,1}([0, T] \times O^-)$ qui est conforme à la condition de croissance quadratique⁷ et que nous définissons $\tau^* := \inf\{s > t : v(s, X_s) = \psi(s, X_s)\}$. Si*

- *pour tous $(t, x) \in [0, T] \times O^-$, v est conforme à l'inégalité variationnelle (28), et*
- *v est conforme aux conditions limites (4),*

alors $v = V$ et τ^ est un moment d'arrêt optimal.*

Notons que dans le théorème 3, nous posons que $X_t = (F_t, M_t)$ pour $t \in [0, T]$ et $x = (F, m)$ pour faciliter la notation.

Démonstration. D'après la condition limite (4), nous établissons que $\tau^* \in T_{[t, T]}$ car $v(T, x) = \psi(T, F_T) = \max(F, G_T)$. Définissons une séquence de temps d'arrêt

$$\tau_t^n = \tau^* \wedge \inf\{s > t : |X_s^{t,x} - x| > n\}.$$

De plus, $-v_t - \mathcal{L}v - \lambda_{x+t} \max(F, G) = 0$ on $[t, \tau_t^n]$ car $[t, \tau_t^n] \subset [t, \tau^*]$ par définition. Par conséquent, selon la formule d'Itô et en posant que $\xi_s = \lambda_{x+s} + r$ pour $s \in [0, T]$, nous établissons que

$$\begin{aligned} & e^{-\int_0^{\tau_t^n} \xi_u du} v(\tau_t^n, X_{\tau_t^n}^{t,x}) - e^{-\int_0^t \xi_u du} v(t, x) \\ &= \int_0^{\tau_t^n} e^{-\int_0^s \xi_u du} (v_t + \mathcal{L}v)(s, X_s^{t,x}) ds + \int_0^{\tau_t^n} e^{-\int_0^s \xi_u du} v_F \sigma F_s dW_s^Q + \int_0^{\tau_t^n} e^{-\int_0^s \xi_u du} (v_m - v_F \alpha \mathbb{1}_{\{F_s \geq \vartheta\}}) dM_s \\ &= \int_0^{\tau_t^n} e^{-\int_0^s \xi_u du} (v_t + \mathcal{L}v)(s, X_s^{t,x}) ds + \int_0^{\tau_t^n} e^{-\int_0^s \xi_u du} v_F \sigma F_s dW_s^Q. \end{aligned}$$

Notons que la deuxième égalité est rendue possible par le fait que $(v_m - v_F \alpha \mathbb{1}_{F_t \geq \vartheta}) dM_t = 0$ a.s., qui est vérifié puisque $dM_t = 0$ pour $F_t < M_t$ pour $v_m - v_F \alpha \mathbb{1}_{F_t \geq \vartheta} = 0$ pour $F_t = M_t$ selon les conditions limites (4). En supposant l'espérance conditionnelle $\mathbb{E}_{t,x}^Q[\cdot]$ des deux côtés de cette égalité, et en réorganisant l'équation qui en découle en utilisant ensuite l'équation (3), nous obtenons

$$v(t, x) = \mathbb{E}_{t,x}^Q \left[e^{-\int_t^{\tau_t^n} \xi_u du} v(\tau_t^n, X_{\tau_t^n}^{t,x}) + \int_t^{\tau_t^n} e^{-\int_t^s \xi_u du} \lambda_{x+s} \max\{F_s, G_s\} ds \right].$$

⁷ Il existe une constante C , de sorte que $|v(t, x)| \leq C(1 + |x|^2)$ où $x = (F, m)$ et $(t, x) \in [0, T] \times O^-$.

Puisque $\tau_t^n \rightarrow \tau^*$ comme $n \rightarrow \infty$, en vertu du théorème de convergence dominé et de la condition de croissance quadratique, il s'ensuit que

$$v(t, x) = \mathbb{E}_{t,x}^{\mathbb{Q}} \left[e^{-\int_t^{\tau^*} \xi_u du} \psi(\tau^*, F_{\tau^*}) + \int_t^{\tau^*} e^{-\int_t^s \xi_u du} \lambda_{x+s} \max\{F_s, G_s\} ds \right]$$

Pour tout $\tau \in T_{[t, \tau]}$, nous avons $-v_t - Lv - \lambda_{x+t} \max\{F, G\} \geq 0$ on $[t, \tau)$ depuis $V \geq \psi$ par la définition de τ^* .

Par conséquent,

$$v(t, x) \geq \mathbb{E}_{t,x}^{\mathbb{Q}} \left[e^{-\int_t^{\tau} \xi_u du} \psi(\tau, F_{\tau}) + \int_t^{\tau} e^{-\int_t^s \xi_u du} \lambda_{x+s} \max\{F_s, G_s\} ds \right]$$

pour tout $\tau \in T_{[t, \tau]}$. Donc, nous avons $v = V$ et τ^* est un temps d'arrêt optimal.

A.2 Démonstration de la proposition 1

Démonstration. Supposons que le temps d'arrêt τ suit une loi exponentielle de paramètre η , indépendamment de la durée de vie future du titulaire de police ρ et le rendement du compte de placement $\{F_t\}_{t \in [0, T]}$. Le premier moment du versement des RV est

$$v^1(t, F, m) = \mathbb{E}_t[F, m] e^{-\zeta(\tau \wedge \rho \wedge T - t)} H(F_{\tau \wedge \rho \wedge T}).$$

Nous considérons trois cas, notamment $\tau \wedge \rho > T$, $\tau < \rho \wedge T$, et $\rho < \tau \wedge T$. En outre, pour une notation plus simple, nous écrivons $\mathbb{E}_t[F, m[\cdot]] = \mathbb{E}_t[\cdot]$ et $v^1(t, F, m) = v^1$. Il s'ensuit que

$$v^1 = \mathbb{E}_t \left[\underbrace{e^{-\zeta(T-t)} \max(F_T, G_T) \mathbb{1}_{\{\tau \wedge \rho > T\}}}_{\text{Term A}} + \underbrace{e^{-\zeta(\tau-t)} (1 - \kappa_\tau) F_\tau \mathbb{1}_{\{\tau < \rho \wedge T\}}}_{\text{Term B}} + \underbrace{e^{-\zeta(\rho-t)} \max(F_\rho, G_\rho) \mathbb{1}_{\{\rho < \tau \wedge T\}}}_{\text{Term C}} \right],$$

où

- pour le terme **A** :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_t[\mathbf{A}] &= \mathbb{E}_t \left[\mathbb{E} \left[e^{-\zeta(T-t)} \max(F_T, G_T) \mathbb{1}_{\{\tau \wedge \rho > T\}} \middle| F_T, \tau \wedge \rho > t \right] \right] \\ &= \mathbb{E}_t \left[e^{-\zeta(T-t)} \max(F_T, G_T) \frac{\mathbb{P}(\tau \wedge \rho > T)}{\mathbb{P}(\tau \wedge \rho > t)} \right] \\ &= \mathbb{E}_t \left[e^{-\int_t^T (\zeta + \lambda_{x+s} + \eta) ds} \max(F_T, G_T) \right], \end{aligned}$$

- pour le terme **B** :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_t[\mathbf{B}] &= \mathbb{E}_t \left\{ \mathbb{E} \left[e^{-\zeta(\tau-t)} (1 - \kappa_\tau) F_\tau \mathbb{1}_{\{\tau < \rho \wedge T\}} \middle| \tau \wedge \rho > t \right] \right\} \\ &= \mathbb{E}_t \left[\int_t^T \left(\int_s^T u-t p_{x+t} \lambda_{x+u} du + T-t p_{x+t} \right) (1 - \kappa_s) F_s \eta e^{-(\zeta + \eta)(s-t)} ds \right] \\ &= \mathbb{E}_t \left[\int_t^T e^{-\int_t^s (\zeta + \lambda_{x+v} + \eta) dv} \eta (1 - \kappa_s) F_s ds \right], \end{aligned}$$

- et pour le terme **C** :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_t[\mathbf{C}] &= \mathbb{E}_t \left[\mathbb{E} \left[e^{-\zeta(\rho-t)} \max(F_\rho, G_\rho) \mathbb{1}_{\{\rho < \tau \wedge T\}} \middle| \tau \wedge \rho > t \right] \right] \\ &= \mathbb{E}_t \left[\int_t^T \left(\int_u^T \eta e^{-\eta(s-t)} ds + e^{-\eta(T-t)} \right) \lambda_{x+u} e^{-\int_t^u (\zeta + \lambda_v) dv} \max(F_u, G_u) du \right] \\ &= \mathbb{E}_t \left[\int_t^T e^{-\int_t^s (\zeta + \lambda_{x+v} + \eta) dv} \lambda_{x+s} \max(F_s, G_s) ds \right]. \end{aligned}$$

En combinant les termes **A**, **B** et **C**, nous obtenons

$$v^1 = \mathbb{E}_t \left[e^{-\int_t^T \delta_s^1 ds} \max(F_T, G_T) + \int_t^T e^{-\int_t^s \delta_u^1 du} [\eta (1 - \kappa_s) F_s + \lambda_{x+s} \max(F_s, G_s)] ds \right]$$

L'expression de $v^2(t, F, m)$ est obtenue de façon semblable.

A.3 Démonstration du théorème 1

Pour démontrer le théorème 1, nous présentons d'abord une notation et des résultats par souci de concision de l'illustration.

- $\mathbb{E}_{t,F,m}[\cdot] = \mathbb{E}_t[\cdot]$ and $\text{Var}_{t,F,m}[\cdot] = \text{Var}_t[\cdot]$.
- $\mathcal{L}h(t, F, m) := h_t + (\mu - c\mathbb{1}_{\{F < \theta\}})Fh_F + \frac{1}{2}\sigma^2 F^2 h_{FF}$ for a function h s.t. $h \in C^{1,2,1}([0, T] \times \mathcal{O})$.
- $\mathcal{L}f(t, F, m, y) := f_t + (\mu - c\mathbb{1}_{\{F < \theta\}})(Ff_F + yf_y) + \frac{1}{2}\sigma^2(F^2 f_{FF} + y^2 f_{yy}) + f_{Fy}Fy\sigma^2$ for a function f s.t. $f \in C^{1,2,1,2}([0, T] \times \bar{\mathcal{O}} \times [0, m])$.
- $\mathbb{E}_t[h(t + \varepsilon, F_{t+\varepsilon}, M_{t+\varepsilon})] = h(t, F, m) + \varepsilon\mathcal{L}h(t, F, m) + \mathbb{E}_t\left[\int_t^{t+\varepsilon} (h_m - \alpha\mathbb{1}_{\{F \geq \theta\}}h_F)dM_s\right] + o(\varepsilon)$.
- $\mathbb{E}_t[f(t + \varepsilon, F_{t+\varepsilon}, M_{t+\varepsilon}, y_{t+\varepsilon})] = f(t, F, m, y) + \varepsilon\mathcal{L}f(t, F, m, y) + \mathbb{E}_t\left[\int_t^{t+\varepsilon} f_m - (f_F + f_y)\alpha\mathbb{1}_{\{F \geq \theta\}}dM_s\right] + o(\varepsilon)$.

Démonstration. La démonstration du théorème 1 peut être divisée en deux parties. Dans la première partie, nous démontrons que V , g , et f sont en effet la solution de leur interprétation probabiliste (24) en vertu de la règle d'arrêt \hat{u} . Dans la deuxième partie, nous démontrons que \hat{u} est une règle d'arrêt d'équilibre. Premièrement, nous démontrons que

$$\begin{aligned} g(t, F, m) &= \mathbb{E}_t \left[H(F_{\tau^{\hat{u}} \wedge \rho}) \mid \rho > t \right] \\ &= \mathbb{E}_t \left[e^{-\int_t^{\tau^{\hat{u}}} \lambda_{x+u} du} \psi(\tau^{\hat{u}}, F_{\tau^{\hat{u}}}) + \int_t^{\tau^{\hat{u}}} e^{-\int_t^s \lambda_{x+u} du} \lambda_{x+s} \max(F_s, G_s) ds \right] \end{aligned}$$

où

$$H(F_{\tau^{\hat{u}} \wedge \rho}) = \begin{cases} \max(F_\rho, G_\rho), & \text{if } \rho < \tau^{\hat{u}}, \\ \psi(\tau^{\hat{u}}, F_{\tau^{\hat{u}}}), & \text{if } \rho \geq \tau^{\hat{u}}. \end{cases}$$

Supposons que $g \in C^{1,2,1}([0, T] \times \hat{\mathcal{O}})$ est conforme à l'équation (22) avec conditions limites (23), et définissons une séquence de temps d'arrêt

$$\tau_t^n := \tau^{\hat{u}} \wedge \inf \left\{ s > t : |F_s^{t,F} - F| > n \right\}.$$

En appliquant la formule Itô à $e^{-\int_0^s \lambda_u du} g(s, F_s, M_s)$, nous obtenons

$$\begin{aligned} & e^{-\int_t^{\tau_t^n} \lambda_{x+u} du} g(\tau_t^n, F_{\tau_t^n}, M_{\tau_t^n}) - g(t, F, m) \\ &= \int_t^{\tau_t^n} e^{-\int_t^s \lambda_{x+u} du} (\mathcal{L}g - \lambda_{x+s}g) ds + \int_t^{\tau_t^n} e^{-\int_t^s \lambda_{x+u} du} (g_m - \alpha\mathbb{1}_{\{F_s > \theta\}}g_F) dM_s \\ &+ \int_t^{\tau_t^n} e^{-\int_t^s \lambda_{x+u} du} \sigma F_s g_F dW_s. \end{aligned}$$

En utilisant $\mathbb{E}_t[\cdot]$ des deux côtés de l'équation et en invoquant l'équation (22) avec conditions limites (23), nous obtenons

$$g(t, F, m) = \mathbb{E}_t \left[e^{-\int_t^{\tau_t^n} \lambda_{x+u} du} g(\tau_t^n, F_{\tau_t^n}, M_{\tau_t^n}) + \int_t^{\tau_t^n} e^{-\int_t^s \lambda_{x+u} du} \lambda_{x+s} \max(F_s, G_s) ds \right]$$

En posant que $n \rightarrow \infty$ donne $\tau_t^n \rightarrow \tau^{\hat{u}}$, ce qui mène à

$$\begin{aligned} g(t, F, m) &= \mathbb{E}_t \left[e^{-\int_t^{\tau^{\hat{u}}} \lambda_{x+u} du} g(\tau^{\hat{u}}, F_{\tau^{\hat{u}}}, M_{\tau^{\hat{u}}}) + \int_t^{\tau^{\hat{u}}} e^{-\int_t^s \lambda_{x+u} du} \lambda_{x+s} \max(F_s, G_s) ds \right] \\ &= \mathbb{E}_t \left[e^{-\int_t^{\tau^{\hat{u}}} \lambda_{x+u} du} \psi(\tau^{\hat{u}}, F_{\tau^{\hat{u}}}) + \int_t^{\tau^{\hat{u}}} e^{-\int_t^s \lambda_{x+u} du} \lambda_{x+s} \max(F_s, G_s) ds \right] \\ &= \mathbb{E}_t [H(F_{\tau^{\hat{u}} \wedge \rho}) | \rho > t], \end{aligned}$$

puisque

$$\tau^{\hat{u}} = \inf\{s \geq t : \hat{u}(t, F, m) = 1\}.$$

Définissons $f^y(t, F, m) := f(t, F, m, y)$ pour y fixe. De même, appliquons la formule Itô à $e^{-\int_0^s \lambda_{x+u} du} f^y(s, F_s, M_s)$ pour obtenir

$$\begin{aligned} &e^{-\int_t^{\tau_t^n} \lambda_{x+u} du} f^y(\tau_t^n, F_{\tau_t^n}, M_{\tau_t^n}) - f^y(t, F, m) \\ &= \int_t^{\tau_t^n} e^{-\int_t^s \lambda_{x+u} du} (\mathcal{L} f^y - \lambda_{x+s} f^y) ds + \int_t^{\tau_t^n} e^{-\int_t^s \lambda_{x+u} du} (f_m^y - \alpha \mathbf{1}_{\{F_s > \theta\}} f_F^y) dM_s \\ &+ \int_t^{\tau_t^n} e^{-\int_t^s \lambda_{x+u} du} \sigma F_s f_F^y dW_s. \end{aligned}$$

En utilisant $\mathbb{E}_t[\cdot]$ des deux côtés de l'équation et en invoquant l'équation (20) avec conditions limites (21), nous obtenons

$$\begin{aligned} f^y(t, F, m) &= \mathbb{E}_t \left[e^{-\int_t^{\tau_t^n} \lambda_{x+u} du} f^y(\tau_t^n, F_{\tau_t^n}, M_{\tau_t^n}) \right. \\ &\quad \left. + \int_t^{\tau_t^n} e^{-\int_t^s \lambda_{x+u} du} \lambda_{x+s} \left(\max(F_s, G_s) - \frac{\gamma(y)}{2} \max(F_s, G_s)^2 \right) ds \right]. \end{aligned}$$

En posant que $n \rightarrow \infty$, nous avons $\tau_t^n \rightarrow \tau^u$ qui, à son tour, mène à

$$\begin{aligned}
f^y(t, F, m) &= \mathbb{E}_t \left[e^{-\int_t^{\tau^{\hat{u}}} \lambda_{x+u} du} f^y(\tau^{\hat{u}}, F_{\tau^{\hat{u}}}, M_{\tau^{\hat{u}}}) \right. \\
&\quad \left. + \int_t^{\tau^{\hat{u}}} e^{-\int_t^s \lambda_{x+u} du} \lambda_{x+s} \left(\max(F_s, G_s) ds - \frac{\gamma(y)}{2} \max(F_s, G_s)^2 \right) \right] \\
&= \mathbb{E}_t \left[e^{-\int_t^{\tau^{\hat{u}}} \lambda_{x+u} du} \psi(\tau^{\hat{u}}, F_{\tau^{\hat{u}}}) + \int_t^{\tau^{\hat{u}}} e^{-\int_t^s \lambda_{x+u} du} \lambda_{x+s} \max(F_s, G_s) ds \right] \\
&\quad - \frac{\gamma(y)}{2} \mathbb{E}_t \left[e^{-\int_t^{\tau^{\hat{u}}} \lambda_{x+u} du} \psi^2(\tau^{\hat{u}}, F_{\tau^{\hat{u}}}) + \int_t^{\tau^{\hat{u}}} e^{-\int_t^s \lambda_{x+u} du} \lambda_{x+s} \max(F_s, G_s)^2 ds \right] \\
&= \mathbb{E}_t [H(F_{\tau^{\hat{u}} \wedge \rho}) | \rho > t] - \frac{\gamma(y)}{2} \mathbb{E}_t [H^2(F_{\tau^{\hat{u}} \wedge \rho}) | \rho > t].
\end{aligned}$$

Pour vérifier l'interprétation probabiliste de V , nous devons démontrer que

$$V(t, F, m) = \frac{\gamma(x)}{2} g^2(t, F, m) + f(t, F, m, F).$$

Puisque $V(T, F, m) = \psi(T, F)$, nous avons $u^* \in T_{[t, \tau]}$. En appliquant la formule d'Itô à $e^{-\int_0^s \lambda_u du} V(s, F_s, M_s)$, nous obtenons

$$\begin{aligned}
&e^{-\int_t^{\tau_t^n} \lambda_{x+u} du} V(\tau_t^n, F_{\tau_t^n}, M_{\tau_t^n}) - V(t, F, m) \\
&= \int_t^{\tau_t^n} e^{-\int_t^s \lambda_{x+u} du} (\mathcal{L}V - \lambda_{x+s} V) ds + \int_t^{\tau_t^n} e^{-\int_t^s \lambda_{x+u} du} (V_m - \alpha \mathbb{1}_{\{F_s > \theta\}} V_F) dM_s \\
&\quad + \int_t^{\tau_t^n} e^{-\int_t^s \lambda_{x+u} du} \sigma F_s V_F dW_s.
\end{aligned}$$

Puisque $[t, \tau_t^n] \subset [t, \tau^u]$, nous déduisons que $V > \psi$ on $[t, \tau_t^n]$. À l'aide de l'équation (17) pour $V > \psi$, en prenant $\mathbb{E}_t[\cdot]$ des deux côtés de l'équation et en posant que $n \rightarrow \infty$, nous obtenons

$$\begin{aligned}
V(t, F, m) &= \mathbb{E}_t \left[e^{-\int_t^{\tau^{\hat{u}}} \lambda_{x+u} du} V(\tau^{\hat{u}}, F_{\tau^{\hat{u}}}, M_{\tau^{\hat{u}}}) \right] - \mathbb{E}_t \left\{ \int_t^{\tau^{\hat{u}}} e^{-\int_t^s \lambda_{x+u} du} \left[(\mu - c \mathbb{1}_{\{F_s < \theta\}}) F_s \left(f_y + \frac{\gamma_F}{2} g^2 \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{1}{2} \sigma^2 F_s^2 \left(f_{yy} + 2f_{Fy} + \frac{\gamma_{FF}}{2} g^2 + \gamma(F_s) g_F^2 + 2\gamma_F g g_F \right) + \frac{\gamma(F_s)}{2} \lambda_{x+s} (g - \max(F_s, G_s))^2 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \lambda_{x+s} \max(F_s, G_s) \right] ds \right\} - \mathbb{E}_t \left[\int_t^{\tau^{\hat{u}}} e^{-\int_t^s \lambda_{x+u} du} (V_m - \alpha \mathbb{1}_{\{F_s \geq \theta V_F\}}) dM_s \right].
\end{aligned}$$

Maintenant, en appliquant la formule Itô et en effectuant les opérations comme ci-dessus sur $e^{-\int_0^s \lambda_u du} f(s, F_s, M_s, F_s)$, nous déduisons que

$$\begin{aligned}
f(t, F, m, F) &= \mathbb{E}_t \left[e^{-\int_t^{\tau^{\hat{u}}} \lambda_{x+u} du} f(\tau^{\hat{u}}, F_{\tau^{\hat{u}}}, M_{\tau^{\hat{u}}}, F_{\tau^{\hat{u}}}) \right] - \mathbb{E}_t \left\{ \int_t^{\tau^{\hat{u}}} e^{-\int_t^s \lambda_{x+u} du} \left[-\lambda_{x+s} \max(F_s, G_s) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \lambda_{x+s} \frac{\gamma(F_s)}{2} \max(F_s, G_s)^2 + f_y F_s (\mu - \mathbb{1}_{\{F_s < \theta\}}) + \frac{1}{2} F_s^2 \sigma^2 f_{yy} + F_s^2 \sigma^2 f_{Fy} \right] ds \right\} \\
&\quad + \mathbb{E}_t \left(\int_t^{\tau^{\hat{u}}} f_y \alpha \mathbb{1}_{\{F_s \geq \theta\}} dM_s \right).
\end{aligned}$$

Encore une fois, en appliquant la formule Itô et en effectuant l'opération comme ci-dessus

$e^{-\int_0^s \lambda_{x+u} du} \frac{\gamma(F_s)}{2} g(s, F_s, M_s)$, nous avons

$$\begin{aligned} \frac{\gamma(F)}{2} g^2(t, F, m) &= \mathbb{E}_t \left[e^{-\int_t^{\tau^{\hat{u}}} \lambda_{x+u} du} \frac{\gamma(F_{\tau^{\hat{u}}})}{2} g(\tau^{\hat{u}}, F_{\tau^{\hat{u}}}, M_{\tau^{\hat{u}}}) \right] - \mathbb{E}_t \left\{ \int_t^{\tau^{\hat{u}}} e^{-\int_t^s \lambda_{x+u} du} \right. \\ &\quad \left[-\gamma(F_s) g \lambda_{x+s} \max(F_s, G_s) + \frac{\gamma(F_s)}{2} \lambda_{x+s} g^2 + \frac{\gamma(F_s)}{2} g_F^2 \sigma^2 F_s^2 + \frac{g_F^2}{2} \gamma_F (\mu - c \mathbb{1}_{\{F_s < \theta\}}) F_s \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{4} g^2 \gamma_{FF} \sigma^2 F_s^2 + \gamma_F \sigma^2 F_s^2 g g_F \right] ds \right\} + \mathbb{E}_t \left[\int_t^{\tau^{\hat{u}}} e^{-\int_t^s \lambda_{x+u} du} \frac{\gamma(F)}{2} g^2 \alpha \mathbb{1}_{\{F_s \geq \theta\}} dM_s \right]. \end{aligned}$$

En combinant les expressions $f(t, F, m, F)$ et $\frac{\gamma(F)}{2} g^2(t, F, m)$, il est facile d'établir que

$$V(t, F, m) = \frac{\gamma(x)}{2} g^2(t, F, m) + f(t, F, m, F).$$

Maintenant, nous démontrons que la règle d'arrêt $u^{\hat{}}$ définie dans l'équation (1) est une règle d'arrêt d'équilibre. Rappelons que nous définissons une règle d'arrêt u^ε de sorte que

$$u^\varepsilon(s, y, z) = \begin{cases} u \in \{0, 1\}, & \text{for } t \leq s < (t + \varepsilon) \wedge \rho \\ \hat{u}(s, y, z), & \text{for } (t + \varepsilon) \wedge \rho \leq s < T \wedge \rho. \end{cases}$$

si $u = 1$, alors $J(t, F, m; \tau^{u^\varepsilon}) = \psi(t, F) \leq J(t, F, m; \tau^{\hat{u}}) = V(t, F, m)$. Par conséquent, $u^{\hat{}}$ est automatiquement conforme à la définition d'une règle d'arrêt d'équilibre. Si $u = 0$, nous avons

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(t, F, m; \tau^{u^\varepsilon}) &= \mathbb{E}_t [H(F_{\tau^{u^\varepsilon} \wedge \rho}) | \rho > t] - \frac{\gamma(F)}{2} \text{Var}_t [H(F_{\tau^{u^\varepsilon} \wedge \rho}) | \rho > t] \\ &= \mathbb{E}_t \left[H(F_{\tau^{u^\varepsilon} \wedge \rho}) - \frac{\gamma(F)}{2} H^2(F_{\tau^{u^\varepsilon} \wedge \rho}) | \rho > t \right] + \frac{\gamma(F)}{2} \left\{ \mathbb{E}_t [H(F_{\tau^{u^\varepsilon} \wedge \rho}) | \rho > t] \right\}^2 \\ &= e^{-\int_t^{t+\varepsilon} \lambda_{x+u} du} \mathbb{E}_t \left[H(F_{\tau^{u^\varepsilon} \wedge \rho}) - \frac{\gamma(F)}{2} H^2(F_{\tau^{u^\varepsilon} \wedge \rho}) | \rho > t + \varepsilon \right] \\ &\quad + \int_t^{t+\varepsilon} e^{-\int_t^s \lambda_{x+u} du} \lambda_{x+s} \mathbb{E}_t \left[H(F_s) - \frac{\gamma(F)}{2} H^2(F_s) \right] ds \\ &\quad + \frac{\gamma(F)}{2} \left\{ e^{-\int_t^{t+\varepsilon} \lambda_{x+u} du} \mathbb{E}_t [H(F_{\tau^{u^\varepsilon} \wedge \rho}) | \rho > t + \varepsilon] + \int_t^{t+\varepsilon} e^{-\int_t^s \lambda_{x+u} du} \lambda_{x+s} \mathbb{E}_t [H(F_s)] \right\}^2 \\ &= (1 - \lambda_{x+t} \varepsilon) \mathbb{E}_t \left\{ \mathbb{E}_{t+\varepsilon} \left[H(F_{\tau^{\hat{u}} \wedge \rho}) - \frac{\gamma(F)}{2} H^2(F_{\tau^{\hat{u}} \wedge \rho}) | \rho > t + \varepsilon \right] \right\} + \varepsilon \lambda_{x+t} \left[H(F) - \frac{\gamma(F)}{2} H^2(F) \right] \\ &\quad + \frac{\gamma(F)}{2} \left\{ (1 - \lambda_{x+t} \varepsilon) \mathbb{E}_t \left[\mathbb{E}_{t+\varepsilon} \left(H(F_{\tau^{\hat{u}} \wedge \rho}) | \rho > t + \varepsilon \right) \right] + \lambda_{x+t} \varepsilon H(F) \right\}^2 + o(\varepsilon). \end{aligned}$$

En outre, nous avons

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(t + \varepsilon, F_{t+\varepsilon}, M_{t+\varepsilon}; \tau^{\hat{u}}) &= \mathbb{E}_{t+\varepsilon} \left[H(F_{\tau^{\hat{u}} \wedge \rho}) - \frac{\gamma(F_{t+\varepsilon})}{2} H^2(F_{\tau^{\hat{u}} \wedge \rho}) | \rho > t + \varepsilon \right] \\ &\quad + \frac{\gamma(F_{t+\varepsilon})}{2} \left\{ \mathbb{E}_{t+\varepsilon} [H(F_{\tau^{\hat{u}} \wedge \rho}) | \rho > t + \varepsilon] \right\}^2. \end{aligned}$$

En prenant $\mathbb{E}_t[\cdot]$ des deux côtés de l'équation, nous obtenons

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_t [\mathcal{J}(t + \varepsilon, F_{t+\varepsilon}, M_{t+\varepsilon}; \tau^{\hat{u}})] &= \mathbb{E}_t \left\{ \mathbb{E}_{t+\varepsilon} \left[H(F_{\tau^{\hat{u}} \wedge \rho}) - \frac{\gamma(F_{t+\varepsilon})}{2} H^2(F_{\tau^{\hat{u}} \wedge \rho}) \middle| \rho > t + \varepsilon \right] \right\} \\ &+ \mathbb{E}_t \left[\frac{\gamma(F_{t+\varepsilon})}{2} \left\{ \mathbb{E}_{t+\varepsilon} \left[H(F_{\tau^{\hat{u}} \wedge \rho}) \middle| \rho > t + \varepsilon \right] \right\}^2 \right]. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(t, F, m; \tau^{u^\varepsilon}) &= (1 - \lambda_{x+t}\varepsilon) \mathbb{E}_t \left\{ \mathbb{E}_{t+\varepsilon} \left[H(F_{\tau^{\hat{u}} \wedge \rho}) - \frac{\gamma(F)}{2} H^2(F_{\tau^{\hat{u}} \wedge \rho}) \middle| \rho > t + \varepsilon \right] \right\} + \varepsilon \lambda_{x+t} \left[H(F) - \frac{\gamma(F)}{2} H^2(F) \right] \\ &+ \frac{\gamma(F)}{2} \left\{ (1 - \lambda_{x+t}\varepsilon) \mathbb{E}_t \left[\mathbb{E}_{t+\varepsilon} \left(H(F_{\tau^{\hat{u}} \wedge \rho}) \middle| \rho > t + \varepsilon \right) \right] + \lambda_{x+t}\varepsilon H(F) \right\}^2 \\ &+ \mathbb{E}_t [\mathcal{J}(t + \varepsilon, F_{t+\varepsilon}, M_{t+\varepsilon}; \tau^{\hat{u}})] - \mathbb{E}_t \left\{ \mathbb{E}_{t+\varepsilon} \left[H(F_{\tau^{\hat{u}} \wedge \rho}) - \frac{\gamma(F_{t+\varepsilon})}{2} H^2(F_{\tau^{\hat{u}} \wedge \rho}) \middle| \rho > t + \varepsilon \right] \right\} \\ &- \mathbb{E}_t \left[\frac{\gamma(F_{t+\varepsilon})}{2} \left\{ \mathbb{E}_{t+\varepsilon} \left[H(F_{\tau^{\hat{u}} \wedge \rho}) \middle| \rho > t + \varepsilon \right] \right\}^2 \right] + o(\varepsilon) \\ &= (1 - \lambda_{x+t}\varepsilon) \mathbb{E}_t [f(t + \varepsilon, F_{t+\varepsilon}, M_{t+\varepsilon}, F)] + \varepsilon \lambda_{x+t} \left[H(F) - \frac{\gamma(F)}{2} H^2(F) \right] \\ &+ \frac{\gamma(F)}{2} \left\{ (1 - \lambda_{x+t}\varepsilon) \mathbb{E}_t [g(t + \varepsilon, F_{t+\varepsilon}, M_{t+\varepsilon})] + \lambda_{x+t}\varepsilon H(F) \right\}^2 + \mathbb{E}_t [V(t + \varepsilon, F_{t+\varepsilon}, M_{t+\varepsilon})] \\ &- \mathbb{E}_t [f(t + \varepsilon, F_{t+\varepsilon}, M_{t+\varepsilon}, F_{t+\varepsilon})] - \mathbb{E}_t \left[\frac{\gamma(F_{t+\varepsilon})}{2} g^2(t + \varepsilon, F_{t+\varepsilon}, M_{t+\varepsilon}) \right] + o(\varepsilon). \end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned} &\mathcal{J}(t, F, m; \tau^{u^\varepsilon}) - \mathcal{J}(t, F, m; \tau^{\hat{u}}) \\ &= \varepsilon \mathcal{L}V(t, F, m) - \varepsilon \lambda_{x+t} f^F(t, F, m) + \varepsilon \mathcal{L}f^F(t, F, m) + \varepsilon \lambda_{x+t} \left[H(F) - \frac{\gamma(F)}{2} H^2(F) \right] \\ &- \varepsilon \gamma(F) \lambda_{x+t} g^2(t, F, m) + \varepsilon \gamma(F) \lambda_{x+t} H(F) g(t, F, m) - \varepsilon \mathcal{L}f(t, F, m, y) - \varepsilon \mathcal{L} \frac{\gamma(F)}{2} g^2(t, F, m) \\ &+ \mathbb{E}_t \left[\int_t^{t+\varepsilon} V_m - \alpha \mathbf{1}_{\{F \geq \theta\}} \left(V_F - f_y - \frac{\gamma_F}{2} g^2(t, F, m) \right) dM_s \right] + o(\varepsilon), \end{aligned}$$

où $f^F(t, F, m) = f(t, F, m, y)$ avec la quatrième variable y fixe. En réorganisant l'équation ci-dessus, nous obtenons

$$\begin{aligned} &\mathcal{J}(t, F, m; \tau^{u^\varepsilon}) - \mathcal{J}(t, F, m; \tau^{\hat{u}}) \\ &= \varepsilon \left\{ V_t + (\mu - c \mathbf{1}_{\{F \geq \theta\}}) F V_F \left(V_F - f_y - \frac{\gamma_F}{2} g^2 \right) + \frac{1}{2} \left(V_{FF} - f_{yy} - 2f_{Fy} - \frac{\gamma_{FF}}{2} g^2 - \gamma(F) g_F^2 - 2\gamma_F g g_F \right) \right. \\ &- \left. \frac{\lambda_{x+t} \gamma(F)}{2} (g - \max(F, G))^2 - \lambda_{x+t} V + \lambda_{x+t} \max(F, G) \right\} \\ &+ \mathbb{E}_t \left[\int_t^{t+\varepsilon} V_m - \alpha \mathbf{1}_{\{F \geq \theta\}} \left(V_F - f_y - \frac{\gamma_F}{2} g^2(t, F, m) \right) dM_s \right] + o(\varepsilon). \end{aligned}$$

En invoquant les équations (17) et (18), en divisant les deux côtés de l'équation par ε , et en posant que ε passe à 0, nous obtenons

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{\mathcal{J}(t, F, m; \tau^{u^\varepsilon}) - \mathcal{J}(t, F, m; \tau^{\hat{u}})}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{o(\varepsilon)}{\varepsilon} = 0.$$

Voilà ce qui complète la démonstration.

A.4 Démonstration du théorème 2

Démonstration. Rappelons que pour $\hat{u} = 0$, les deux premiers moments ν^p ($p = 1, 2$) sont conformes à l'équation (9) avec les conditions limites (10) avec $\zeta = 0$. Notons qu'à partir de la combinaison linéaire (27), nous avons

$$\begin{cases} V(t, F, m) = \nu^1(t, F, m; \tau^{\hat{u}}) - \frac{\gamma(F)}{2} \left[\nu^2(t, F, m; \tau^{\hat{u}}) - (\nu^1(t, F, m; \tau^{\hat{u}}))^2 \right] \\ f(t, F, m, y) = \nu^1(t, F, m; \tau^{\hat{u}}) - \frac{\gamma(y)}{2} \nu^2(t, F, m; \tau^{\hat{u}}), \\ g(t, F, m) = \nu^1(t, F, m; \tau^{\hat{u}}). \end{cases}$$

Par conséquent, les dérivées de V en ce qui concerne t, F et m peuvent alors être exprimées en fonction de celles de ν^1 et ν^2 de la manière suivante :

$$\begin{cases} V_t = \nu_t^1 - \frac{\gamma(F)}{2} (\nu_t^2 - 2\nu_t^1 \nu_t^1), \\ V_F = \nu_F^1 - \frac{\gamma F}{2} (\nu^2 - (\nu^1)^2) - \frac{\gamma(F)}{2} (\nu_F^2 - 2\nu^1 \nu_F^1), \\ V_{FF} = \nu_{FF}^1 - \frac{\gamma_{FF}}{2} (\nu^2 - (\nu^1)^2) - \gamma_F (\nu_F^2 - 2\nu^1 \nu_F^1) - \frac{\gamma(F)}{2} (\nu_{FF}^2 - 2(\nu_F^1)^2 - 2\nu^1 \nu_{FF}^1) \\ V_m = \nu_m^1 - \frac{\gamma(F)}{2} (\nu_m^2 - 2\nu^1 \nu_m^1). \end{cases}$$

De même, pour f , ses dérivées peuvent être exprimées en la forme

$$\begin{cases} f_t = \nu_t^1 - \frac{\gamma(y)}{2} \nu_t^2, \\ f_F = \nu_F^1 - \frac{\gamma(y)}{2} \nu_F^2, \\ f_y|_{y=F} = -\frac{\gamma'(F)}{2} \nu^2, \\ f_{FF} = \nu_{FF}^1 - \frac{\gamma(y)}{2} \nu_{FF}^2 \\ f_{yy}|_{y=F} = -\frac{\gamma'(FF)}{2} \nu^2, \\ f_{Fy}|_{y=F} = -\frac{\gamma'(F)}{2} \nu_F^2, \\ f_m = \nu_m^1 - \frac{\gamma(y)}{2} \nu_m^2. \end{cases}$$

Tout d'abord, nous vérifions si la combinaison linéaire (27) résout l'équation (17) avec conditions limites (18). Pour $\hat{u} = 1$,

$$\begin{aligned} V(t, F, m) &= \nu^1(t, F, m; \tau^{\hat{u}}) - \frac{\gamma(F)}{2} \left[\nu^2(t, F, m; \tau^{\hat{u}}) - (\nu^1(t, F, m; \tau^{\hat{u}}))^2 \right] \\ &= \max(F, G) - \frac{\gamma(F)}{2} (\max(F, G)^2 - \max(F, G)^2) \\ &= \max(F, G) = \psi(t, F). \end{aligned}$$

Pour $\hat{u} = 0$, nous savons que

$$V_t + (\mu - c\mathbb{1}_{\{F \leq \theta\}}) F \left(V_F - f_y - \frac{\gamma(F)}{2} g^2 \right) + \frac{1}{2} \sigma^2 F^2 \left(V_{FF} - f_{yy} - 2f_{Fy} - \frac{\gamma_{FF}}{2} g^2 \right) - \gamma(F) g_F^2 - 2\gamma_F g g_F - \frac{\lambda_{x+t} \gamma(F)}{2} (g - \max(F, G))^2 - \lambda_{x+t} V + \lambda_{x+t} \max(F, G) = 0.$$

Nous insérons les dérivées de V, f et g selon ν^1 et ν^2 et nous vérifions que l'égalité est toujours valable :

$$\begin{aligned} & \nu_t^1 - \frac{\gamma(F)}{2} (\nu_t^2 - 2\nu^1 \nu_t^1) + (\mu - c\mathbb{1}_{\{F \leq \theta\}}) F \left(\nu_F^1 - \frac{\gamma(F)}{2} \nu_F^2 + \gamma(F) \nu^1 \nu_F^1 \right) \\ & + \frac{1}{2} \sigma^2 F^2 \left(\nu_{FF}^1 - \frac{\gamma(F)}{2} \nu_{FF}^2 + \gamma(F) \nu^1 \nu_{FF}^1 \right) - \frac{\lambda_{x+t} \gamma(F)}{2} (\nu^1 - \max(F, G))^2 \\ & - \lambda_{x+t} \left[\nu^1 - \frac{\gamma(F)}{2} (\nu^2 - (\nu^1)^2) \right] + \lambda_{x+t} \max(F, G) \\ & = \left[\nu_t^1 + (\mu - c\mathbb{1}_{\{F < \theta\}}) F \nu_F^1 + \frac{1}{2} \sigma^2 F^2 \nu_{FF}^1 - \lambda_{x+t} \nu^1 + \lambda_{x+t} \max(F, G) \right] \\ & - \frac{\gamma(F)}{2} \left[\nu_t^2 + (\mu - c\mathbb{1}_{\{F < \theta\}}) F \nu_F^2 + \frac{1}{2} \sigma^2 F^2 \nu_{FF}^2 - \lambda_{x+t} \nu^2 + \lambda_{x+t} \max(F, G)^2 \right] \\ & + \gamma(F) \nu^1 \left[\nu_t^1 + (\mu - c\mathbb{1}_{\{F < \theta\}}) F \nu_F^1 + \frac{1}{2} \sigma^2 F^2 \nu_{FF}^1 - \lambda_{x+t} \nu^1 + \lambda_{x+t} \max(F, G) \right] \\ & = 0. \end{aligned}$$

Nous devons maintenant vérifier les conditions limites (18) :

- pour la condition terminale

$$V(T, F, m) = \nu^1(T, F, m; \tau^{\hat{u}}) - \frac{\gamma(F)}{2} [\nu^2(T, F, m; \tau^{\hat{u}}) - (\nu^1(T, F, m; \tau^{\hat{u}}))^2] = \max(F, G),$$

- pour la condition lorsque $F = 0$,

$$\begin{aligned} & V_t - \frac{\lambda_{x+t} \gamma(0)}{2} (\nu^1 - G)^2 - \lambda_{x+t} V + \lambda_{x+t} G \\ & = \nu_t^1 - \frac{\gamma(0)}{2} \nu_t^2 + \gamma(0) \nu^1 \nu_t^1 - \frac{\lambda_{x+t} \gamma(0)}{2} (\nu^1)^2 + \lambda_{x+t} \gamma(0) \nu^1 G - \frac{\lambda_{x+t} \gamma(0)}{2} G^2 \\ & - \lambda_{x+t} \left(\nu^1 - \frac{\gamma(0)}{2} (\nu^2 - (\nu^1)^2) \right) + \lambda_{x+t} G \\ & = (\nu^1 - \lambda_{x+t} \nu^1 + \lambda_{x+t} G) - \frac{\gamma(0)}{2} (\nu^2 - \lambda_{x+t} \nu^2 + \lambda_{x+t} G^2) + \gamma(0) \nu^1 (\nu^1 - \lambda_{x+t} \nu^1 + \lambda_{x+t} G) \\ & = 0, \end{aligned}$$

- et pour la condition lorsque $F = m$,

$$\begin{aligned} & V_m - \alpha \mathbb{1}_{\{F \geq \theta\}} \left(V_F - f_y - \frac{\gamma'(F)}{2} (\nu^1)^2 \right) \\ & = \nu_m^1 - \frac{\gamma(F)}{2} (\nu_m^2 - 2\nu^1 \nu_m^1) - \alpha \mathbb{1}_{\{F \geq \theta\}} \left[\nu_F^1 - \frac{\gamma(F)}{2} (\nu^2 - (\nu^1)^2) - \frac{\gamma(F)}{2} (\nu_F^2 - 2\nu^1 \nu_F^1) + \frac{\gamma_F}{2} \nu^2 - \frac{\gamma_F}{2} (\nu^1)^2 \right] \\ & = \nu_m^1 - \frac{\gamma(F)}{2} (\nu_m^2 - 2\nu^1 \nu_m^1) - \alpha \mathbb{1}_{\{F \geq \theta\}} \left[\nu_F^1 - \frac{\gamma(F)}{2} (\nu_F^2 - 2\nu^1 \nu_F^1) \right] \\ & = (\nu_m^1 - \alpha \mathbb{1}_{\{F \geq \theta\}} \nu_F^1) - \frac{\gamma(F)}{2} (\nu_m^2 - \alpha \mathbb{1}_{\{F \geq \theta\}} \nu_F^2) + \gamma(F) \nu^1 (\nu_m^1 - \alpha \mathbb{1}_{\{F \geq \theta\}} \nu_F^1) \\ & = 0. \end{aligned}$$

Enfin, nous vérifions si la fonction f définie dans la combinaison linéaire (27) résout l'équation (20) avec conditions limites (21). Pour $\hat{u} = 1$,

$$\begin{aligned} f(t, F, m, y) &= \nu^1(t, F, m; \tau^{\hat{u}}) - \frac{\gamma(y)}{2} \nu^2(t, F, m; \tau^{\hat{u}}) \\ &= \max(F, G) - \frac{\gamma(y)}{2} \max(F, G)^2 \\ &= \psi(t, F) - \frac{\gamma(y)}{2} \psi(t, F). \end{aligned}$$

Pour $\hat{u} = 0$, nous obtenons

$$f_t + (\mu - c\mathbb{1}_{\{F \leq \theta\}}) F f_F + \frac{1}{2} \sigma^2 F^2 f_{FF} - \lambda_{x+t} f + \lambda_{x+t} \left[\max(F, G) - \frac{\gamma(y)}{2} \max(F, G)^2 \right] = 0.$$

Comme nous l'avons démontré, nous insérons les dérivées de f selon ν^1 et ν^2 et nous vérifions que l'égalité est toujours valable :

$$\begin{aligned} &\nu_t^1 - \frac{\gamma(y)}{2} \nu_t^2 + (\mu - c\mathbb{1}_{\{F \leq \theta\}}) F \left(\nu_F^1 - \frac{\gamma(y)}{2} \nu_F^2 \right) + \frac{1}{2} \sigma^2 F^2 \left(\nu_{FF}^1 - \frac{\gamma(y)}{2} \nu_{FF}^2 \right) \\ &\quad - \lambda_{x+t} \left(\nu^1(t, F, m) - \frac{\gamma(y)}{2} \nu^2(t, F, m) \right) + \lambda_{x+t} \left[\max(F, G) - \frac{\gamma(y)}{2} \max(F, G)^2 \right] \\ &= \left[\nu_t^1 + (\mu - c\mathbb{1}_{\{F < \theta\}}) F \nu_F^1 + \frac{1}{2} \sigma^2 F^2 \nu_{FF}^1 - \lambda_{x+t} \nu^1 + \lambda_{x+t} \max(F, G) \right] \\ &\quad - \frac{\gamma(y)}{2} \left[\nu_t^2 + (\mu - c\mathbb{1}_{\{F < \theta\}}) F \nu_F^2 + \frac{1}{2} \sigma^2 F^2 \nu_{FF}^2 - \lambda_{x+t} \nu^2 + \lambda_{x+t} \max(F, G)^2 \right] \\ &= 0. \end{aligned}$$

Nous vérifions maintenant les conditions limites (21) :

- pour la condition terminale

$$f(T, F, m, y) = \nu^1(T, F, m; \tau^{\hat{u}}) - \frac{\gamma(y)}{2} \nu^2(T, F, m; \tau^{\hat{u}}) = \max(F, G) - \frac{\gamma(y)}{2} \max(F, G)^2,$$

- pour la condition lorsque $F = 0$,

$$\begin{aligned} &f_t - \lambda_{x+t} f + \lambda_{x+t} G - \frac{\gamma(y)}{2} \lambda_{x+t} G^2 \\ &= \nu_t^1 - \frac{\gamma(y)}{2} \nu_t^2 - \lambda_{x+t} \left(\nu^1 - \frac{\gamma(y)}{2} \nu^2 \right) + \lambda_{x+t} G - \frac{\gamma(y)}{2} \lambda_{x+t} G^2 \\ &= (\nu^1 - \lambda_{x+t} \nu^1 + \lambda_{x+t} G) - \frac{\gamma(y)}{2} (\nu^2 - \lambda_{x+t} \nu^2 + \lambda_{x+t} G) \\ &= 0, \end{aligned}$$

- pour la condition lorsque $F = m$,

$$\begin{aligned}
 f_m - \alpha \mathbb{1}_{\{F \geq \theta\}} f_F &= \nu_m^1 - \frac{\gamma(y)}{2} \nu_m^2 - \alpha \mathbb{1}_{\{F \geq \theta\}} \left(\nu_F^1 - \frac{\gamma(y)}{2} \nu_F^2 \right) \\
 &= (\nu_m^1 - \alpha \mathbb{1}_{\{F \geq \theta\}} \nu_F^1) - \frac{\gamma(y)}{2} (\nu_m^2 - \alpha \mathbb{1}_{\{F \geq \theta\}} \nu_F^2) \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Voilà ce qui complète la démonstration.